

des mathématiques et de la physique qui sous-tend la théorie du chaos – et de la mécanique des fluides ont donné naissance au concept dit de structures lagrangiennes cohérentes. Il s'agit de lignes matérielles dans les fluides s'écoulant en deux dimensions et de surfaces dans les fluides à trois dimensions, qui forment une sorte d'ossature pour l'écoulement. Elles sont qualifiées de « barrières de transport », car elles déterminent le déplacement du fluide et délimitent des zones qui n'échangent pas de matière. Plus précisément, les structures lagrangiennes cohérentes sont des lignes matérielles vers lesquelles le fluide se trouvant à proximité est attiré ou d'où il est repoussé. Cette approche fournit un nouvel outil pour, entre autres, mieux comprendre le mouvement de débris charriés par un fluide.

Bien que la détection de structures lagrangiennes cohérentes dans des fluides en trois dimensions ait fait des progrès, cet article se concentre sur le cas des écoulements bidimensionnels. Les structures lagrangiennes cohérentes sont alors des courbes régulières et continues d'éléments fluides. Elles sont plus simples à manier que leur équivalent dans un fluide tridimensionnel, tout en gardant une importance pratique : les écoulements bidimensionnels décrivent de façon pertinente le transport de polluants qui restent à la surface de l'océan ou dans une couche de densité constante de l'atmosphère.

Des barrières qui canalisent les débris

Les barrières de transport reflètent une certaine organisation de l'écoulement du fluide. Dans les trois événements que nous avons mentionnés, elles permettent d'expliquer l'aspect allongé et étroit du nuage de cendres volcaniques, la structure étirée de la nappe de pétrole et l'aspect filamenteux de la répartition des contaminants radioactifs (voir la figure 1). L'approche novatrice des structures lagrangiennes cohérentes a montré son efficacité sur le terrain, en particulier lors d'une expérience réalisée dans la baie de Monterey et consistant à suivre la dérive de bouées, ainsi que lors de l'analyse *a posteriori* de la marée noire de *Deepwater Horizon* dans le golfe du Mexique.

Pour en comprendre les principes essentiels, il est nécessaire de présenter quelques notions de dynamique des fluides et des

méthodes utilisées pour les étudier, ainsi que leurs limites.

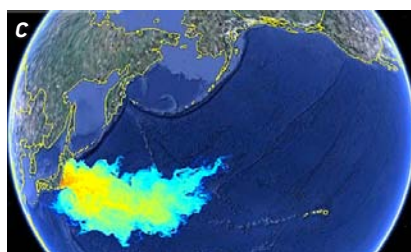
Il existe deux points de vue pour étudier le mouvement d'un fluide. Le point de vue dit eulérien considère les propriétés du fluide en chaque point fixe de l'espace et du temps. On peut par exemple quadriller la surface du fluide et, en chaque nœud du maillage, spécifier la vitesse du fluide, en grandeur et en direction. On cartographie ainsi le champ des vitesses à un instant donné, ce qui est un exemple typique de la description eulérienne. Dans ce point de vue, l'identité et la provenance de l'élément fluide présent au point considéré n'ont pas d'importance.

À l'inverse, le point de vue dit lagrangien s'intéresse aux éléments de fluide et définit de petits volumes de fluide dont on suit le parcours et les variations de vitesse au gré de l'écoulement. Cette approche est la plus naturelle pour étudier la dérive de débris dans un fluide.

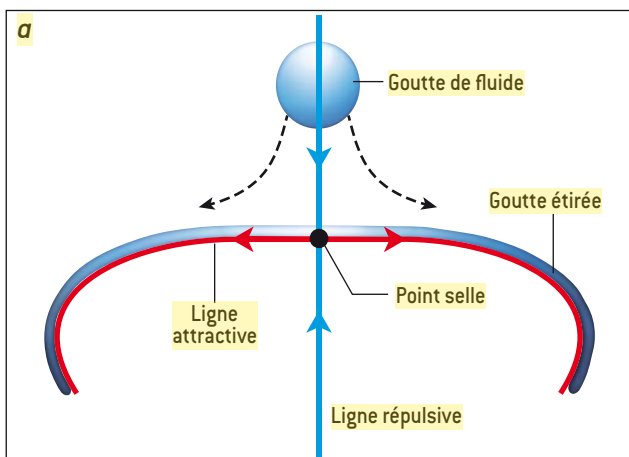
Pour élaborer une méthode efficace d'analyse d'un fluide, un point important est la notion d'objectivité, ou d'invariance par changement de référentiel. Cela signifie qu'une propriété attachée à un élément de fluide ne doit pas dépendre du référentiel dans lequel le système est étudié ; sinon, des structures ou des caractéristiques sans pertinence physique risquent d'apparaître. Ainsi, les champs eulériens tels que le champ des vitesses ne sont pas invariants lorsqu'on effectue une translation ou une rotation à vitesse non nulle du système de coordonnées utilisé pour décrire la situation.

Par exemple, pour visualiser un écoulement, on utilise souvent les lignes de courant, lignes qui suivent la direction locale du vecteur vitesse à un instant donné. Ce sont, par construction, des entités eulériennes. Or, si l'on translate à une certaine vitesse le système de coordonnées utilisé, les vecteurs vitesse du fluide sont modifiés et, par conséquent, les lignes de courant aussi. Par exemple, les tourbillons sont identifiés comme des régions du fluide dont les lignes de courant sont fermées. Mais un tourbillon observé d'un référentiel peut se présenter de façon très différente, et ne plus correspondre à un tourbillon.

Pour les écoulements instables, qui sont plus souvent la règle que l'exception dans la nature, il n'existe pas *a priori* de référentiel privilégié. C'est pourquoi les



1. LE NUAGE DE CENDRES de l'éruption du volcan islandais Eyjafjöll en 2010 *(a)*, la nappe de pétrole très étirée lors de la marée noire de la station pétrolière *Deepwater Horizon* dans le golfe du Mexique en 2010 *(b)*, l'étirement vers l'Est de déchets radioactifs issus de la centrale de Fukushima en 2011 *(c)* : des structures invisibles guident les débris au sein des océans et de l'atmosphère.



2. LES ÉCOULEMENTS PERMANENTS OU QUASI PÉRIODIQUES sont assez bien compris. Dans cet exemple, près d'un point selle *(a)*, les particules de fluide arrivent selon la même direction mais dans des sens opposés et sont repoussées dans des directions perpendiculaires. Les lignes répulsive (en bleu) et attractive (en rouge) forment des barrières



de transport. De telles structures sont parfois bien visibles dans la nature. Balayée par un vent régulier, l'île volcanique de Guadalupe *(b)*, au large du Mexique, dans l'océan Pacifique, produit une perturbation périodique dans les mouvements atmosphériques. Les motifs nuageux permettent d'identifier les lignes attractives (en rouge).

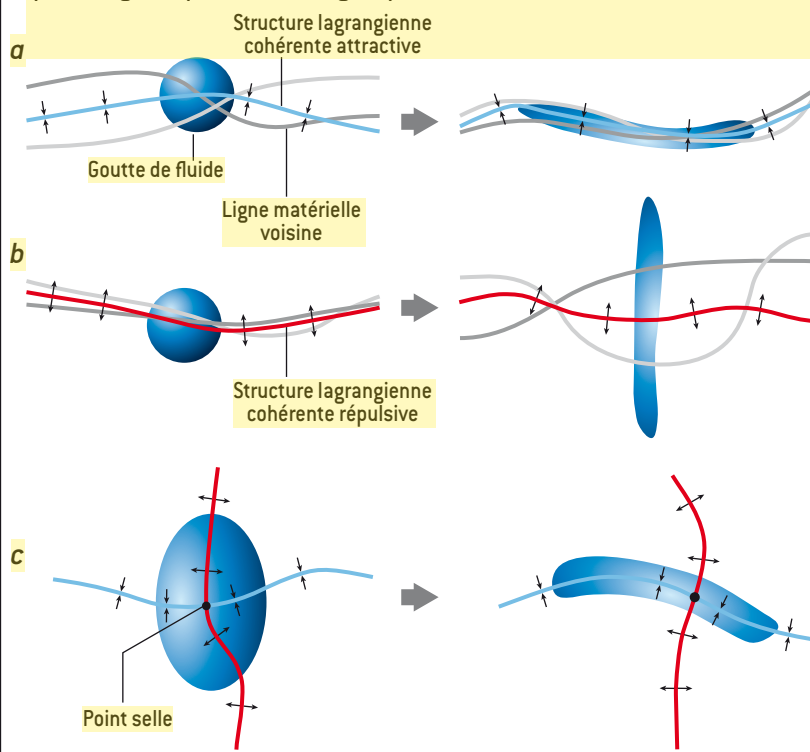
descriptions des structures dynamiques guidant le transport au sein du fluide doivent être indépendantes du référentiel choisi. Pour une marée noire, par exemple, l'interprétation du mouvement des nappes de pétrole ne doit pas dépendre du référentiel dans lequel les mesures sont effectuées : le radar d'une station côtière d'observation, un avion de reconnaissance ou un satellite en orbite. Les prévisions requièrent donc des méthodes lagrangiennes, indépendantes du référentiel utilisé.

Des lignes attractives et répulsives

L'analyse lagrangienne d'un écoulement est bien maîtrisée dans les situations les plus simples, mais elle devient difficile dans des systèmes chaotiques. Examinons d'abord ce qui se passe dans des écoulements permanents (qui ne changent pas avec le temps), périodiques ou quasi périodiques. Par exemple, on peut décrire simplement la dynamique du fluide autour d'un « point selle » d'un écoulement permanent (voir la figure 2a). Les éléments de fluide s'approchent du point selle selon des sens opposés en suivant une ligne de courant. Ils sont ensuite repoussés suivant une ligne orthogonale à la première. La ligne par laquelle le fluide arrive peut être considérée comme un mur répulsif, tandis que la ligne d'échappement constitue un mur attractif : le fluide est repoussé par le premier et s'étire le long du second. Il

DES STRUCTURES ATTRACTIVES ET RÉPULSIVES

Les « structures lagrangiennes cohérentes » attirent ou repoussent le fluide environnant. Une structure lagrangienne cohérente attractive *(a, ligne bleue)* est une ligne matérielle vers laquelle le fluide est attiré plus fortement que vers toute autre ligne (en gris). Un élément de fluide (boule bleue) est attiré par elle et se déforme en l'épousant plus ou moins. De façon analogue, une structure lagrangienne cohérente répulsive *(b, ligne rouge)* est une ligne matérielle qui repousse le fluide plus fortement que toute autre ligne ; la goutte de fluide s'étire perpendiculairement à elle. Ces structures ne peuvent être traversées par du fluide. Le croisement d'une structure répulsive et d'une structure attractive *(c)* forme un point selle généralisé, qui sépare le fluide en quatre régions qui ne se mélangent pas.



est possible de modéliser la dynamique du fluide dans cette région avec juste ces deux lignes.

De telles lignes existent aussi dans les écoulements périodiques et quasi périodiques. Elles constituent le squelette de motifs qu'il est facile d'observer. Un exemple est le sillage que laisse dans les nuages l'île mexicaine de Guadalupe (voir la figure 2b). Un vent régulier souffle au-dessus de cette île, créant une turbulence régulière qui se traduit par un motif quasi périodique dans les nuages, une « allée de tourbillons de von Karman ». Mais l'identification de telles lignes dans des écoulements dont la structure temporelle et spatiale est complexe, apériodique ou chaotique est un défi.

La plupart des méthodes mathématiques disponibles pour identifier des lignes matérielles au sein d'un fluide font l'hypothèse

■ LES AUTEURS



Thomas PEACOCK est professeur d'ingénierie et de mécanique au MIT (Institut de technologie du Massachusetts), aux États-Unis.

George HALLER est professeur de dynamique non linéaire à l'Institut polytechnique (ETH) de Zurich, en Suisse.

d'un écoulement permanent, périodique ou quasi périodique, et supposent une bonne connaissance du champ d'écoulement à tous les instants. Mais les écoulements qui nous intéressent sont en général apériodiques, et le champ des vitesses est connu à partir d'observations ou de simulations numériques sur des intervalles de temps limités. Il en résulte que même les concepts les plus simples, de murs attractifs ou répulsifs et de points selles, sont mal définis dans les situations apériodiques.

Pour les écoulements apériodiques et chaotiques, les barrières de transport qui généralisent les lignes attractives et répulsives des écoulements permanents et périodiques sont précisément les structures lagrangiennes cohérentes. Leur identification nécessite des outils mathématiques appropriés et la connaissance du champ des vitesses sur la zone étudiée pendant l'intervalle de temps considéré.

Un exemple simple : la double gyre

Avant de décrire la méthode d'analyse, illustrons l'intérêt de l'approche des structures lagrangiennes cohérentes, par rapport à un traitement plus classique, avec le problème de la double gyre – une paire de tourbillons voisins et dont les sens de rotation sont opposés (voir l'encadré ci-contre). Dans cet exemple, l'écoulement est périodique et pourrait donc être traité de façon classique, mais il est assez simple pour présenter les idées essentielles de l'approche par les structures lagrangiennes cohérentes.

Le dispositif est constitué d'un bassin rempli de liquide. On y crée deux tourbillons avec des sens de rotation opposés, leur position et leur intensité variant au cours du temps de façon périodique. Lorsqu'on dépose une goutte de colorant entre les deux tourbillons, elle s'étire et se déforme en suivant l'écoulement. Il est difficile de comprendre la forme prise par la goutte au bout d'un certain temps à partir de la seule connaissance du champ des vitesses : le colorant s'est séparé en deux et a formé des lignes dont la forme n'est pas directement reliée aux tourbillons.

En outre, si le référentiel choisi pour l'étude était en rotation, les vecteurs vitesse seraient très différents, mais cela n'aurait pas modifié le trajet pris par le colorant. Ainsi, pour interpréter le résultat, il faut identifier les structures responsables de

L'exemple de la double gyre

L'expérience de la double gyre illustre bien l'intérêt de l'approche par les structures lagrangiennes cohérentes.

Dans un bassin, on crée deux tourbillons ayant des sens de rotation opposés et dont l'intensité varie et les centres se déplacent de façon périodique. Le champ des vitesses (a) du fluide indique la situation au début de l'expérience, lorsqu'on dépose une goutte d'encre (disque noir). La longueur et la direction des flèches indiquent le module et la direction de la vitesse de déplacement des éléments de fluide. Après un certain temps (b), l'encre s'est déplacée dans le bassin. Elle a formé deux filaments qui

s'étirent vers la droite et vers le haut avant de se séparer.

Il est très difficile de comprendre à partir des vecteurs vitesse comment l'encre a pu suivre de telles trajectoires. Intuitivement, d'après les conditions initiales, on pourrait s'attendre à voir l'encre s'approcher du bord inférieur et se diriger surtout à gauche et un peu vers la droite.

L'analyse du champ des vitesses permet d'identifier les structures lagrangiennes cohérentes et de voir plus clairement les contraintes qui ont déplacé l'encre dans le bassin. La recherche des structures lagrangiennes cohérentes au début de l'expérience (c) met en

évidence une structure répulsive (ligne blanche) qui coupe la goutte d'encre (représentée maintenant en rouge et bleu) en deux parties. Cette structure divise la goutte et empêche qu'elle se remêle en formant une barrière infranchissable pour le fluide et l'encre.

L'analyse à la fin de l'expérience (d) met en évidence une structure lagrangienne cohérente attractive (ligne noire) qui va étirer l'encre sur toute sa longueur (en rouge et en bleu correspondant aux lignes de la figure b). L'interprétation de l'influence des différentes structures explique convenablement les observations.

