

est possible de modéliser la dynamique du fluide dans cette région avec juste ces deux lignes.

De telles lignes existent aussi dans les écoulements périodiques et quasi périodiques. Elles constituent le squelette de motifs qu'il est facile d'observer. Un exemple est le sillage que laisse dans les nuages l'île mexicaine de Guadalupe (voir la figure 2b). Un vent régulier souffle au-dessus de cette île, créant une turbulence régulière qui se traduit par un motif quasi périodique dans les nuages, une « allée de tourbillons de von Karman ». Mais l'identification de telles lignes dans des écoulements dont la structure temporelle et spatiale est complexe, apériodique ou chaotique est un défi.

La plupart des méthodes mathématiques disponibles pour identifier des lignes matérielles au sein d'un fluide font l'hypothèse

■ LES AUTEURS



Thomas PEACOCK est professeur d'ingénierie et de mécanique au MIT (Institut de technologie du Massachusetts), aux États-Unis.

George HALLER est professeur de dynamique non linéaire à l'Institut polytechnique (ETH) de Zurich, en Suisse.

d'un écoulement permanent, périodique ou quasi périodique, et supposent une bonne connaissance du champ d'écoulement à tous les instants. Mais les écoulements qui nous intéressent sont en général apériodiques, et le champ des vitesses est connu à partir d'observations ou de simulations numériques sur des intervalles de temps limités. Il en résulte que même les concepts les plus simples, de murs attractifs ou répulsifs et de points selles, sont mal définis dans les situations apériodiques.

Pour les écoulements apériodiques et chaotiques, les barrières de transport qui généralisent les lignes attractives et répulsives des écoulements permanents et périodiques sont précisément les structures lagrangiennes cohérentes. Leur identification nécessite des outils mathématiques appropriés et la connaissance du champ des vitesses sur la zone étudiée pendant l'intervalle de temps considéré.

Un exemple simple : la double gyre

Avant de décrire la méthode d'analyse, illustrons l'intérêt de l'approche des structures lagrangiennes cohérentes, par rapport à un traitement plus classique, avec le problème de la double gyre – une paire de tourbillons voisins et dont les sens de rotation sont opposés (voir l'encadré ci-contre). Dans cet exemple, l'écoulement est périodique et pourrait donc être traité de façon classique, mais il est assez simple pour présenter les idées essentielles de l'approche par les structures lagrangiennes cohérentes.

Le dispositif est constitué d'un bassin rempli de liquide. On y crée deux tourbillons avec des sens de rotation opposés, leur position et leur intensité variant au cours du temps de façon périodique. Lorsqu'on dépose une goutte de colorant entre les deux tourbillons, elle s'étire et se déforme en suivant l'écoulement. Il est difficile de comprendre la forme prise par la goutte au bout d'un certain temps à partir de la seule connaissance du champ des vitesses : le colorant s'est séparé en deux et a formé des lignes dont la forme n'est pas directement reliée aux tourbillons.

En outre, si le référentiel choisi pour l'étude était en rotation, les vecteurs vitesse seraient très différents, mais cela n'aurait pas modifié le trajet pris par le colorant. Ainsi, pour interpréter le résultat, il faut identifier les structures responsables de

L'exemple de la double gyre

L'expérience de la double gyre illustre bien l'intérêt de l'approche par les structures lagrangiennes cohérentes.

Dans un bassin, on crée deux tourbillons ayant des sens de rotation opposés et dont l'intensité varie et les centres se déplacent de façon périodique. Le champ des vitesses (a) du fluide indique la situation au début de l'expérience, lorsqu'on dépose une goutte d'encre (disque noir). La longueur et la direction des flèches indiquent le module et la direction de la vitesse de déplacement des éléments de fluide. Après un certain temps (b), l'encre s'est déplacée dans le bassin. Elle a formé deux filaments qui

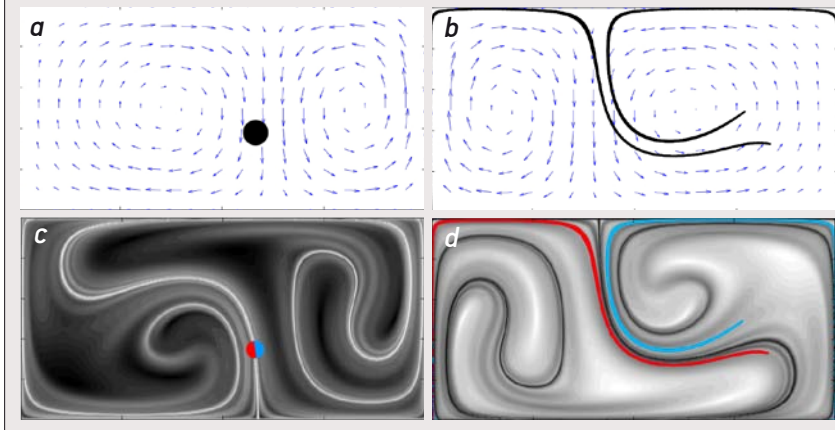
s'étirent vers la droite et vers le haut avant de se séparer.

Il est très difficile de comprendre à partir des vecteurs vitesse comment l'encre a pu suivre de telles trajectoires. Intuitivement, d'après les conditions initiales, on pourrait s'attendre à voir l'encre s'approcher du bord inférieur et se diriger surtout à gauche et un peu vers la droite.

L'analyse du champ des vitesses permet d'identifier les structures lagrangiennes cohérentes et de voir plus clairement les contraintes qui ont déplacé l'encre dans le bassin. La recherche des structures lagrangiennes cohérentes au début de l'expérience (c) met en

évidence une structure répulsive (ligne blanche) qui coupe la goutte d'encre (représentée maintenant en rouge et bleu) en deux parties. Cette structure divise la goutte et empêche qu'elle se remêle en formant une barrière infranchissable pour le fluide et l'encre.

L'analyse à la fin de l'expérience (d) met en évidence une structure lagrangienne cohérente attractive (ligne noire) qui va étirer l'encre sur toute sa longueur (en rouge et en bleu correspondant aux lignes de la figure b). L'interprétation de l'influence des différentes structures explique convenablement les observations.



IDENTIFIER LES BARRIÈRES DE TRANSPORT DANS UN FLUIDE

La marée noire de Deepwater Horizon a permis aux chercheurs de tester l'approche des structures lagrangiennes cohérentes. L'analyse a été faite *a posteriori*, mais elle montre que cette méthode fournit une explication physique aux observations.

Pour implémenter cette procédure, il est nécessaire d'établir une carte des vecteurs vitesse pour toute la période étudiée. Ainsi, pour l'analyse de la marée noire, les vitesses ont été mesurées entre le 14 et le 17 mai 2010.

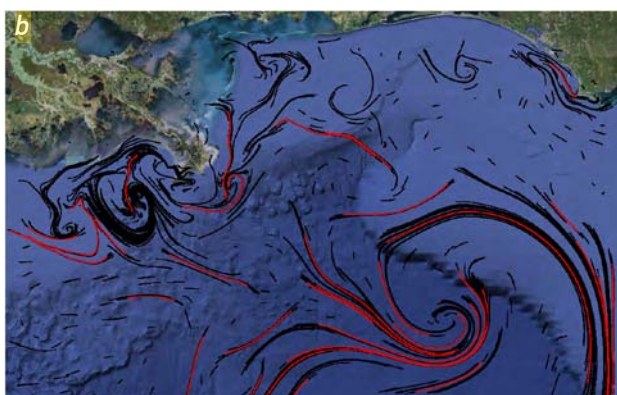
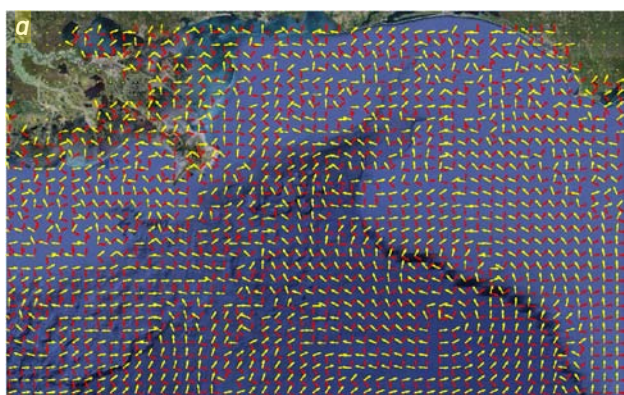
Il faut ensuite calculer les déplacements des éléments de fluide à partir des vitesses mesurées entre le début et la fin de la durée, ce qui correspond aux déformations du fluide. Les chercheurs mettent ainsi en évidence les contraintes qui agissent au sein du fluide, qu'ils représentent par un tenseur de contraintes (dit de Cauchy-Green) en chaque point de la surface marine du golfe.

Dans le cas d'un fluide bidimensionnel, le tenseur de Cauchy-Green

est une matrice 2×2 définie en chaque point et à laquelle sont associés deux nombres et deux vecteurs (*a*, en rouge et jaune) : les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice. Les vecteurs propres indiquent comment se déformerait un petit volume sphérique de fluide centré sur le point où est calculé le tenseur, entre le début et la fin de la période analysée. La boule de fluide devient un ellipsoïde dont la direction des axes est donnée par les vecteurs propres. Il

est possible de définir des lignes de contraintes tangentes à ces vecteurs propres. Les structures lagrangiennes cohérentes correspondent aux lignes de contraintes qui sont localement les plus attractives ou répulsives (au moment initial). On peut suivre leur déplacement en faisant évoluer le champ des vecteurs vitesse.

Le résultat de cette analyse (*b*) montre des lignes attractives (en noir), les plus fortes étant les structures lagrangiennes cohérentes (en rouge).



la forme prise par le colorant et qui sont indépendantes du référentiel choisi.

L'analyse de la dynamique du fluide par l'approche des structures lagrangiennes cohérentes met en évidence des lignes répulsives qui ont coupé la goutte en deux et des lignes attractives qui ont étiré la goutte d'encre, laquelle en a épousé la forme.

Ces structures lagrangiennes cohérentes donnent une tout autre information que le champ des vecteurs vitesse. Leur interprétation permet de comprendre et d'expliquer la forme de la goutte d'encre. Mais si les structures lagrangiennes cohérentes sont l'outil adapté pour étudier le transport de matériaux dans un fluide, comment les identifie-t-on ?

Il y a une vingtaine d'années, Raymond Pierrehumbert et Huijin Yang, à l'Université de Chicago, ont développé une approche innovante dans l'étude lagrangienne du champ des vecteurs vitesse. Ils ont considéré un critère de stabilité : l'« exposant de Lyapunov à temps fini ». Il s'agit d'un nombre qui caractérise la sensibilité du comportement, sur un intervalle de temps donné, d'un élément de fluide vis-à-vis de sa position initiale.

Si l'on considère deux positions initiales légèrement différentes, l'écart entre les positions finales de l'élément de fluide sera d'autant plus grand que l'exposant de Lyapunov est élevé.

Un critère de stabilité

Cet exposant, que l'on peut définir en chaque point, prend une valeur très grande là où le fluide est instable. Pour l'estimer, on mesure de combien des éléments de fluide initialement adjacents se sont mutuellement éloignés au bout de l'intervalle de temps considéré. Les régions répulsives du fluide sont celles où l'exposant de Lyapunov a les valeurs les plus élevées. Pour déterminer les régions attractives, on applique la même procédure en renversant le sens du temps : on part de la fin et on remonte à l'instant initial. Les régions répulsives en situation de temps inversé sont alors des régions attractives quand le temps s'écoule dans le sens normal. Il est nécessaire d'utiliser cette procédure, car si l'on part de l'instant initial, il n'est pas possible à l'avance de savoir quels éléments du fluide vont se retrouver au point considéré.

En 2001, l'un de nous (G. Haller) a relié la distribution spatiale des exposants de Lyapunov à temps fini d'un écoulement fluide aux structures lagrangiennes cohérentes. Les maximums du champ des exposants de Lyapunov quand le temps s'écoule normalement correspondraient aux structures lagrangiennes cohérentes répulsives et les maximums quand on inverse le sens du temps correspondraient aux structures attractives. On considérerait initialement que les lignes de maximums des exposants de Lyapunov étaient quasiment lagrangiennes, ce qui implique que le flux de matière qui les traverse est faible.

La méthode des exposants de Lyapunov a été concrètement appliquée dans deux premiers exemples : le suivi de pollutions côtières en Floride, d'une part, et en Californie, d'autre part. Dans les deux cas, le champ des vitesses a été déterminé par des stations radar à haute fréquence installées sur la côte. L'analyse a permis, par exemple, d'estimer les moments les plus appropriés pour évacuer des déchets des centrales électriques côtières, et éviter que ces déchets ne polluent les côtes. Depuis, la méthode des exposants de Lyapunov a été