

IDENTIFIER LES BARRIÈRES DE TRANSPORT DANS UN FLUIDE

La marée noire de *Deepwater Horizon* a permis aux chercheurs de tester l'approche des structures lagrangiennes cohérentes. L'analyse a été faite *a posteriori*, mais elle montre que cette méthode fournit une explication physique aux observations.

Pour implémenter cette procédure, il est nécessaire d'établir une carte des vecteurs vitesse pour toute la période étudiée. Ainsi, pour l'analyse de la marée noire, les vitesses ont été mesurées entre le 14 et le 17 mai 2010.

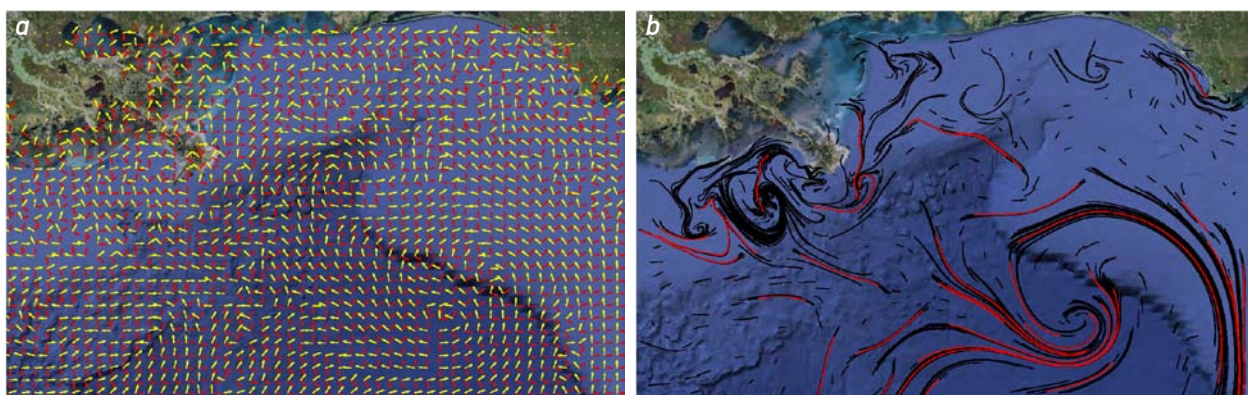
Il faut ensuite calculer les déplacements des éléments de fluide à partir des vitesses mesurées entre le début et la fin de la durée, ce qui correspond aux déformations du fluide. Les chercheurs mettent ainsi en évidence les contraintes qui agissent au sein du fluide, qu'ils représentent par un tenseur de contraintes (dit de Cauchy-Green) en chaque point de la surface marine du golfe.

Dans le cas d'un fluide bidimensionnel, le tenseur de Cauchy-Green

est une matrice 2×2 définie en chaque point et à laquelle sont associés deux nombres et deux vecteurs (*a*, en rouge et jaune) : les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice. Les vecteurs propres indiquent comment se déformerait un petit volume sphérique de fluide centré sur le point où est calculé le tenseur, entre le début et la fin de la période analysée. La boule de fluide devient un ellipsoïde dont la direction des axes est donnée par les vecteurs propres. Il

est possible de définir des lignes de contraintes tangentes à ces vecteurs propres. Les structures lagrangiennes cohérentes correspondent aux lignes de contraintes qui sont localement les plus attractives ou répulsives (au moment initial). On peut suivre leur déplacement en faisant évoluer le champ des vecteurs vitesse.

Le résultat de cette analyse (*b*) montre des lignes attractives (en noir), les plus fortes étant les structures lagrangiennes cohérentes (en rouge).



la forme prise par le colorant et qui sont indépendantes du référentiel choisi.

L'analyse de la dynamique du fluide par l'approche des structures lagrangiennes cohérentes met en évidence des lignes répulsives qui ont coupé la goutte en deux et des lignes attractives qui ont étiré la goutte d'encre, laquelle en a épousé la forme.

Ces structures lagrangiennes cohérentes donnent une tout autre information que le champ des vecteurs vitesse. Leur interprétation permet de comprendre et d'expliquer la forme de la goutte d'encre. Mais si les structures lagrangiennes cohérentes sont l'outil adapté pour étudier le transport de matériaux dans un fluide, comment les identifie-t-on ?

Il y a une vingtaine d'années, Raymond Pierrehumbert et Huijin Yang, à l'Université de Chicago, ont développé une approche innovante dans l'étude lagrangienne du champ des vecteurs vitesse. Ils ont considéré un critère de stabilité : l'« exposant de Lyapunov à temps fini ». Il s'agit d'un nombre qui caractérise la sensibilité du comportement, sur un intervalle de temps donné, d'un élément de fluide vis-à-vis de sa position initiale.

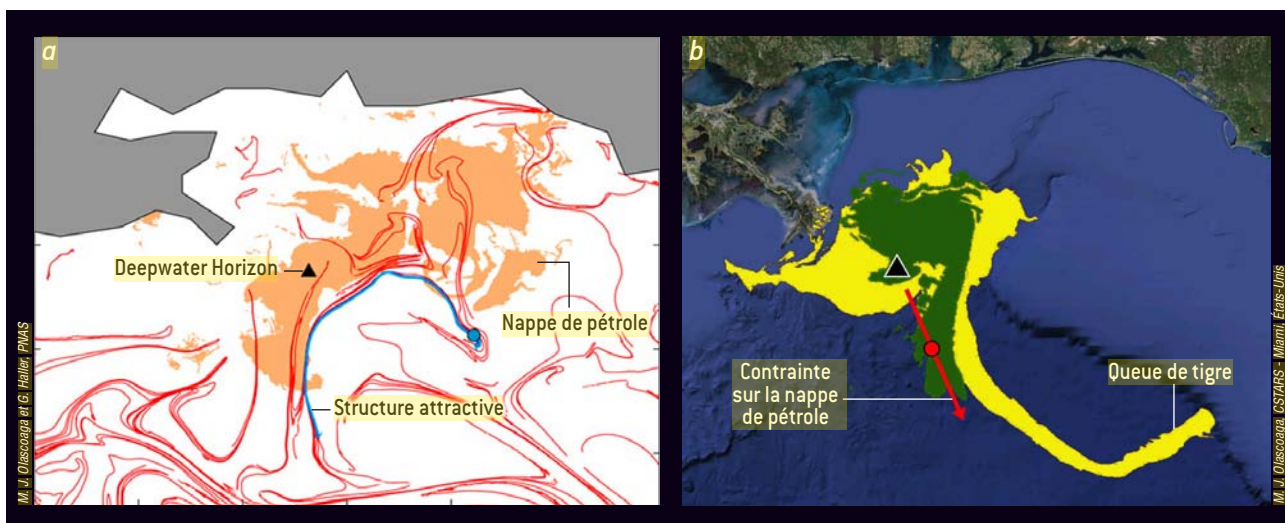
Si l'on considère deux positions initiales légèrement différentes, l'écart entre les positions finales de l'élément de fluide sera d'autant plus grand que l'exposant de Lyapunov est élevé.

Un critère de stabilité

Cet exposant, que l'on peut définir en chaque point, prend une valeur très grande là où le fluide est instable. Pour l'estimer, on mesure de combien des éléments de fluide initialement adjacents se sont mutuellement éloignés au bout de l'intervalle de temps considéré. Les régions répulsives du fluide sont celles où l'exposant de Lyapunov a les valeurs les plus élevées. Pour déterminer les régions attractives, on applique la même procédure en renversant le sens du temps : on part de la fin et on remonte à l'instant initial. Les régions répulsives en situation de temps inversé sont alors des régions attractives quand le temps s'écoule dans le sens normal. Il est nécessaire d'utiliser cette procédure, car si l'on part de l'instant initial, il n'est pas possible à l'avance de savoir quels éléments du fluide vont se retrouver au point considéré.

En 2001, l'un de nous (G. Haller) a relié la distribution spatiale des exposants de Lyapunov à temps fini d'un écoulement fluide aux structures lagrangiennes cohérentes. Les maximums du champ des exposants de Lyapunov quand le temps s'écoule normalement correspondraient aux structures lagrangiennes cohérentes répulsives et les maximums quand on inverse le sens du temps correspondraient aux structures attractives. On considérerait initialement que les lignes de maximums des exposants de Lyapunov étaient quasiment lagrangiennes, ce qui implique que le flux de matière qui les traverse est faible.

La méthode des exposants de Lyapunov a été concrètement appliquée dans deux premiers exemples : le suivi de pollutions côtières en Floride, d'une part, et en Californie, d'autre part. Dans les deux cas, le champ des vitesses a été déterminé par des stations radar à haute fréquence installées sur la côte. L'analyse a permis, par exemple, d'estimer les moments les plus appropriés pour évacuer des déchets des centrales électriques côtières, et éviter que ces déchets ne polluent les côtes. Depuis, la méthode des exposants de Lyapunov a été



3. LE SUIVI A POSTERIORI de la marée noire de Deepwater Horizon a permis d'expliquer de nombreuses tendances dans le déplacement de la nappe de pétrole [a, en orange]. La structure lagrangienne cohérente attractive [a, en bleu], présente entre les 9 et

19 juin 2010, a poussé le pétrole vers l'Est, vers la Floride. Cette approche a aussi montré comment les conditions, au 15 mai, ont déformé la nappe de pétrole [b, en vert] pour donner, deux jours plus tard, ce qu'on a nommé la « queue de tigre » [b, en jaune].

utilisée dans diverses situations : circulation sanguine et dépôt de plaques d'athérome dans les artères, contrôle aérien, écoulement de l'air autour des ailes d'avion, etc.

Relier les structures lagrangiennes cohérentes aux lignes extrémales des exposants de Lyapunov à temps fini offre une méthode numérique relativement simple. Mais cela soulève des difficultés mathématiques qui n'avaient pas été examinées en détail. En particulier, l'approche des exposants de Lyapunov peut créer des faux négatifs ou des faux positifs dans la détection de structures lagrangiennes cohérentes. Et souvent les lignes extrémales ne sont pas lagrangiennes, dans le sens où le flux de matière à travers elles peut être important.

Pour résoudre les difficultés de l'approche des exposants de Lyapunov, l'un de nous (G. Haller) et Mohammad Farazmand, de l'Université McGill à Montréal, ont montré en 2012 que les structures lagrangiennes cohérentes répulsives sont, en fait, des lignes matérielles dont les positions initiales sont, localement, les « lignes de contraintes » les plus répulsives dans l'intervalle de temps considéré. Ces lignes de contraintes sont obtenues mathématiquement à partir d'une caractérisation du champ des déformations dans le fluide (voir l'encadré page 33). Solutions d'équations différentielles du premier ordre, ce sont des courbes régulières qui sont véritablement lagrangiennes : le fluide ne les traverse pas, elles délimitent des zones du fluide qui ne se mélangent pas.

BIBLIOGRAPHIE

M. J. Olascoaga et G. Haller, **Forecasting sudden changes in environmental pollution patterns**, *PNAS*, vol. 109, n° 13, pp. 4738-4743, 2012.

M. Farazmand et G. Haller, **Computing Lagrangian coherent structures from variational LCS theory**, *Chaos*, vol. 22, 013128, 2012.

T. Peacock et J. Dabiri, **Introduction to Focus Issue : Lagrangian coherent structures**, *Chaos*, vol. 20, 017501, 2010.

S. C. Shadden *et al.*, **The correlation between surface drifters and coherent structures based on high-frequency radar data in Monterey Bay**, *Deep-Sea Research, Part II*, vol. 56, n° 3-5, pp. 161-172, 2009.

Par comparaison, l'obtention des lignes extrémales des exposants de Lyapunov s'est révélée être un problème complexe de traitement d'images, ne reposant pas sur un édifice mathématique précis.

La marée noire de Deepwater Horizon a permis de tester l'approche des structures lagrangiennes cohérentes et la recherche des lignes de contraintes. L'image satellitaire enregistrée le 17 mai 2010 a révélé un long filament de pétrole qui s'est étiré au Sud-Est de la nappe principale. Ce filament a été surnommé « queue de tigre » (voir la figure 3). Une simulation numérique du golfe du Mexique à cette période nous a permis d'identifier la structure lagrangienne cohérente attractive qui est à l'origine de la queue de tigre.

Un outil pour prendre des décisions

Les résultats de l'étude des structures lagrangiennes cohérentes dans le golfe du Mexique relèvent d'une démarche que l'on peut qualifier de « rétrovision » où, au contraire de la « prévision », on analyse et explique un phénomène qui s'est déjà produit. C'est un outil important pour expliquer pourquoi le phénomène a évolué de la façon observée et pas d'une autre. Mais les structures lagrangiennes cohérentes sont-elles un outil utilisable pour faire des prévisions et anticiper un comportement tel que la formation de la queue de tigre ?