

LOGIQUE & CALCUL

Figurations de nombres

L'intuition aide le mathématicien, qui devine les théorèmes avant de les démontrer. Mais il y a plus simple et tout aussi efficace : l'œil détecte des régularités dans les images construites à partir des nombres.

Jean-Paul DELAHAYE

L'œil repère des régularités là où l'analyse brutale des données ne voit souvent rien. Cela explique le succès des méthodes de visualisation et de représentation imagée de l'information numérique. Appliquée aux nombres des mathématiciens, π , $\sqrt{2}$, e , etc., cette idée a depuis longtemps produit d'intéressants résultats, dont de belles formes fractales inattendues. Nous sommes loin d'avoir exploité toutes les possibilités de cette méthode, et les nouveaux procédés proposés pour engendrer des images à partir des nombres sont une source féconde de problèmes de difficultés variées.

Des ensembles de nombres en images

La toute première forme fractale qu'est l'« ensemble triadique de Cantor » (nommé aussi « poussière de Cantor », que l'on notera C) est un ensemble de nombres définissable en quelques mots. Introduit par Georg Cantor en 1884, il s'agit de l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1, dont il existe un développement en base 3 n'utilisant pas le chiffre '1' (voir l'encadré 1).

Expliquons cette définition. Le développement triadique du nombre 0 est 0,000... ; le nombre réel 0 est donc dans C . Le développement triadique du nombre réel 1 est 1,000... ou 0,222... (car $1 = 2/3 + 2/3^2 + 2/3^3 + \dots$). Cette seconde forme n'utilise pas le chiffre '1', et donc le nombre réel 1 est

dans C . Le développement triadique de $1/2$ s'écrit 0,11111... (car $1/2 = 1/3 + 1/3^2 + 1/3^3 + \dots$) et il n'y en a pas d'autres. Il comporte des 1, et n'a même que cela, le nombre réel $1/2$ n'est donc pas dans C ; etc.

Cette poussière de Cantor est un ensemble non dénombrable (il a autant d'éléments qu'il y a de nombres réels) et pourtant il est de mesure nulle, c'est-à-dire sans « épaisseur ». C'est une fractale : en le grossissant d'un facteur 3 et en n'en conservant que la moitié droite ou gauche, on retrouve l'ensemble de départ. Sa dimension fractale est $\log(2)/\log(3) = 0,630929\dots$, intermédiaire entre celle d'un point, de dimension 0, et celle d'un segment, de dimension 1.

Deux autres fractales parmi les toutes premières sont aussi définies à partir des développements triadiques : le tapis de Sierpinski, dont la dimension fractale est $\log(8)/\log(3) = 1,892789\dots$, et l'éponge de Menger, de dimension $\log(20)/\log(3) = 2,726933\dots$ (voir l'encadré 1).

Le tapis de Sierpinski est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) avec x et y compris entre 0 et 1 et tels que x et y n'ont jamais un '1' simultanément en même position dans leur développement en base 3. Le carré central est enlevé, car c'est l'ensemble des points (x, y) dont les développements en base 3 commencent par 0,1. Les centres des huit autres carrés (qu'on supprime de façon itérée dans la construction) sont les points dont les

coordonnées ont toutes deux un développement triadique où figure un '1' en seconde position], etc. L'éponge de Menger est aussi définie par une propriété simple des développements triadiques des coordonnées.

L'œil comprend instantanément la régularité de ces ensembles de nombres dont la définition est peu parlante et un tantinet technique. Cette vision satisfait aussi le mathématicien, qui affine sa perception intuitive des objets. Il en est souvent ainsi : l'œil perçoit immédiatement des propriétés qui, sans l'image, auraient été ignorées. Dans d'autres cas, ce qu'on voit reste incompréhensible ou mal expliqué.

Des nombres premiers sur des spirales

La spirale découverte en 1963 par le mathématicien Stanislaw Ulam illustre l'une de ces étrangetés mal expliquées et qui, pourtant, saute aux yeux. En disposant les entiers en spirale et en noircissant les nombres premiers, on voit des alignements très nets dont aucune explication générale et claire n'a pour l'instant été proposée. Découverte en 1993, et indépendamment par Jean-François Colonna en 1999, la spirale logarithmique des nombres premiers, ou spirale de Sacks, fait aussi apparaître des alignements que l'on ne comprend pas bien (voir l'encadré 2).

Un autre mystère visuel profond lié aux nombres premiers est la « comète de

1. Les ensembles de Cantor, Sierpinski et Menger

La poussière de Cantor (a), le tapis de Sierpinski (b) et l'éponge de Menger (c), parmi les toutes premières fractales découvertes, ont une définition simple quand on les considère comme des ensembles de nombres, de couples de nombres, ou de triplets de nombres.

La poussière de Cantor, ou ensemble triadique de Cantor, est l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 dont l'écriture en base 3 ne contient pas de '1'. Une autre dé-

finition est fondée sur un procédé infini de construction : on prend le segment $[0, 1]$, on en enlève le tiers médian, ce qui donne deux segments $[0, 1/3]$ et $[2/3, 1]$ dont on enlève à chacun le tiers médian, et ainsi de suite. L'ensemble limite, les poussières sur le segment $[0, 1]$, est infiniment fin.

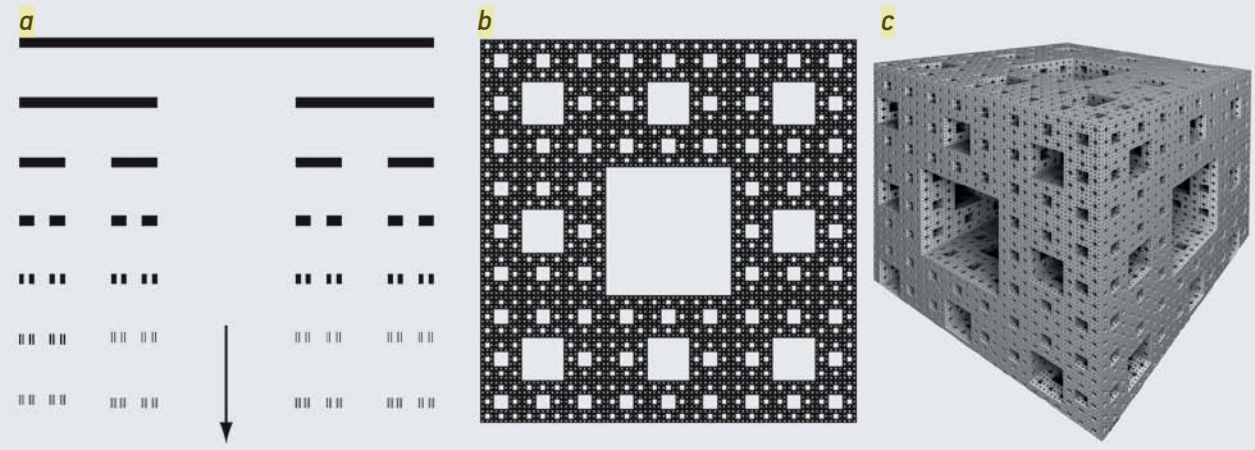
Le tapis de Sierpinski peut aussi être défini par une construction infinie, mais il est plus facile de le définir comme étant l'ensemble de points

du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ dont les coordonnées x, y écrites en base 3 n'ont pas un '1' simultanément en même position (pas de '1' pour x et y en première position après le 0, pas de '1' pour x et y en seconde position, etc.).

L'éponge de Menger se définit soit par un procédé de construction infinie (on retire des cubes, de plus en plus petits), soit en disant que c'est l'ensemble des triplets (x, y, z) de nombres réels compris entre 0 et 1, tels que parmi x, y et z , il n'y a ja-

mais deux nombres ayant un '1' en même position de leur développement triadique.

Dans chacun de ces trois exemples, la représentation imagée des ensembles fait saisir concrètement une définition abstraite en termes de développement triadique. Elle permet instantanément de savoir beaucoup de choses sur les ensembles de nombres considérés, par exemple que le tapis et l'éponge sont d'un seul tenant, mais pas la poussière.



Goldbach » : pour chaque nombre pair p , on calcule le nombre k de façons d'écrire p sous la forme d'une somme de deux nombres premiers, et on place le point de coordonnées (n, k) sur un graphe ; cela produit un nuage d'une surprenante régularité (voir l'encadré 3).

Cette forme suggère la présence d'un ordre secret dans le désordre des nombres premiers. Elle apparaît structurée comme une fractale. D'ailleurs, plus on la dessine avec précision, plus nombreuses sont les courbes que l'œil y décèle. Son aspect lisse contraste avec l'irrégularité et l'aléa observés dans la suite 2, 3, 5, 7, 11, 13, On ignore pourquoi ces striures sont si bien organisées selon des règles constantes à tous les ordres de grandeur.

Cependant, la forme de la comète est utile, car elle fournit un argument heuristique, c'est-à-dire intuitif sans être assez

précis pour constituer une preuve mathématique, en faveur de l'hypothèse que tout nombre pair supérieur à 2 est somme de deux nombres premiers. Cette hypothèse, la conjecture de Goldbach, fut proposée en 1742 lors d'échanges épistolaires entre le mathématicien prussien Christian Goldbach et le prolifique et génial mathématicien suisse Leonhard Euler.

Les points les plus bas du nuage s'alignent et dessinent une courbe qui croît vers l'infini quand n augmente. Si ce que voit notre œil est vrai, alors la conjecture de Goldbach est vraie, car le nuage qui monte n'aura jamais de point sur l'axe des abscisses, donc tout entier pair $n \geq 4$ aura au moins une décomposition en somme de deux nombres premiers. Mieux, le nuage suggère la véracité d'une conjecture plus précise et plus difficile, la « conjecture forte de Goldbach » : si, comme on l'observe, le nuage monte toujours, alors

non seulement tout entier pair $n \geq 4$ s'écrit comme somme de deux nombres premiers d'une façon au moins, mais en fait n s'écrit d'un nombre k de façons qui tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

En 2012, le mathématicien australien Terence Tao a démontré que tout nombre impair (à partir de 5) est somme de cinq nombres premiers ou moins, résultat amélioré l'année suivante par Harald Helfgott, qui a prouvé que tout nombre impair ≥ 5 est somme de trois nombres premiers. Ces résultats qui sont des variantes du résultat recherché pour les nombres pairs font espérer que nous approchons d'une vraie démonstration de la conjecture de Goldbach.

Nous nous sommes jusqu'ici intéressés à des ensembles de nombres. Or plusieurs procédés permettent de tirer une image régulière ou aléatoire (parfois d'aspect fractal) d'un seul nombre. Ces