

1. Les ensembles de Cantor, Sierpinski et Menger

La poussière de Cantor (a), le tapis de Sierpinski (b) et l'éponge de Menger (c), parmi les toutes premières fractales découvertes, ont une définition simple quand on les considère comme des ensembles de nombres, de couples de nombres, ou de triplets de nombres.

La poussière de Cantor, ou ensemble triadique de Cantor, est l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 dont l'écriture en base 3 ne contient pas de '1'. Une autre dé-

finition est fondée sur un procédé infini de construction : on prend le segment $[0, 1]$, on en enlève le tiers médian, ce qui donne deux segments $[0, 1/3]$ et $[2/3, 1]$ dont on enlève à chacun le tiers médian, et ainsi de suite. L'ensemble limite, les poussières sur le segment $[0, 1]$, est infiniment fin.

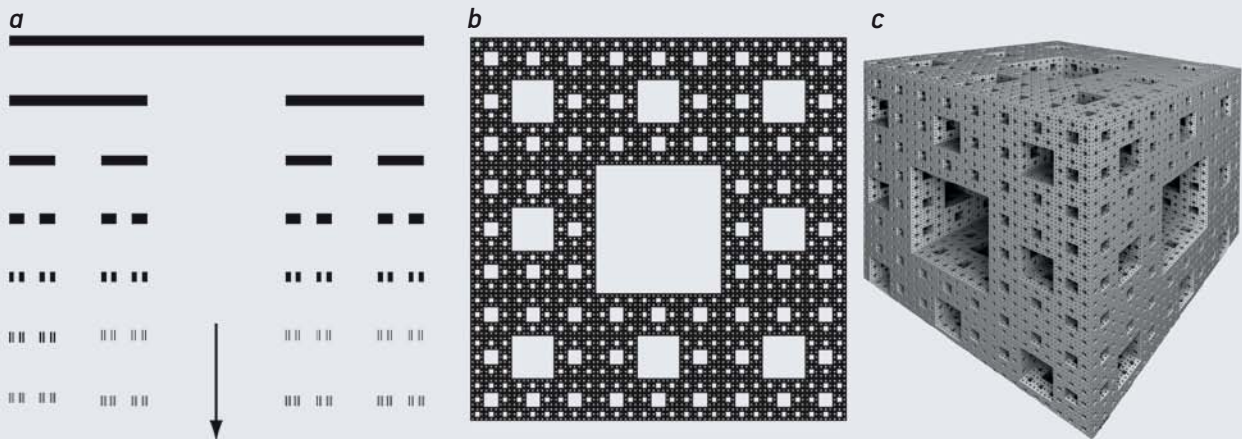
Le tapis de Sierpinski peut aussi être défini par une construction infinie, mais il est plus facile de le définir comme étant l'ensemble de points

du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ dont les coordonnées x, y écrites en base 3 n'ont pas un '1' simultanément en même position (pas de '1' pour x et y en première position après le 0, pas de '1' pour x et y en seconde position, etc.).

L'éponge de Menger se définit soit par un procédé de construction infinie (on retire des cubes, de plus en plus petits), soit en disant que c'est l'ensemble des triplets (x, y, z) de nombres réels compris entre 0 et 1, tels que parmi x, y et z , il n'y a ja-

mais deux nombres ayant un '1' en même position de leur développement triadique.

Dans chacun de ces trois exemples, la représentation imagée des ensembles fait saisir concrètement une définition abstraite en termes de développement triadique. Elle permet instantanément de savoir beaucoup de choses sur les ensembles de nombres considérés, par exemple que le tapis et l'éponge sont d'un seul tenant, mais pas la poussière.



Goldbach » : pour chaque nombre pair p , on calcule le nombre k de façons d'écrire p sous la forme d'une somme de deux nombres premiers, et on place le point de coordonnées (n, k) sur un graphe ; cela produit un nuage d'une surprenante régularité (voir l'encadré 3).

Cette forme suggère la présence d'un ordre secret dans le désordre des nombres premiers. Elle apparaît structurée comme une fractale. D'ailleurs, plus on la dessine avec précision, plus nombreuses sont les courbes que l'œil y décèle. Son aspect lisse contraste avec l'irrégularité et l'aléa observés dans la suite 2, 3, 5, 7, 11, 13, On ignore pourquoi ces striures sont si bien organisées selon des règles constantes à tous les ordres de grandeur.

Cependant, la forme de la comète est utile, car elle fournit un argument heuristique, c'est-à-dire intuitif sans être assez

précis pour constituer une preuve mathématique, en faveur de l'hypothèse que tout nombre pair supérieur à 2 est somme de deux nombres premiers. Cette hypothèse, la conjecture de Goldbach, fut proposée en 1742 lors d'échanges épistolaires entre le mathématicien prussien Christian Goldbach et le prolifique et génial mathématicien suisse Leonhard Euler.

Les points les plus bas du nuage s'alignent et dessinent une courbe qui croît vers l'infini quand n augmente. Si ce que voit notre œil est vrai, alors la conjecture de Goldbach est vraie, car le nuage qui monte n'aura jamais de point sur l'axe des abscisses, donc tout entier pair $n \geq 4$ aura au moins une décomposition en somme de deux nombres premiers. Mieux, le nuage suggère la véracité d'une conjecture plus précise et plus difficile, la « conjecture forte de Goldbach » : si, comme on l'observe, le nuage monte toujours, alors

non seulement tout entier pair $n \geq 4$ s'écrit comme somme de deux nombres premiers d'une façon au moins, mais en fait n s'écrit d'un nombre k de façons qui tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

En 2012, le mathématicien australien Terence Tao a démontré que tout nombre impair (à partir de 5) est somme de cinq nombres premiers ou moins, résultat amélioré l'année suivante par Harald Helfgott, qui a prouvé que tout nombre impair ≥ 5 est somme de trois nombres premiers. Ces résultats qui sont des variantes du résultat recherché pour les nombres pairs font espérer que nous approchons d'une vraie démonstration de la conjecture de Goldbach.

Nous nous sommes jusqu'ici intéressés à des ensembles de nombres. Or plusieurs procédés permettent de tirer une image régulière ou aléatoire (parfois d'aspect fractal) d'un seul nombre. Ces