

1. Les ensembles de Cantor, Sierpinski et Menger

La poussière de Cantor (a), le tapis de Sierpinski (b) et l'éponge de Menger (c), parmi les toutes premières fractales découvertes, ont une définition simple quand on les considère comme des ensembles de nombres, de couples de nombres, ou de triplets de nombres.

La poussière de Cantor, ou ensemble triadique de Cantor, est l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 1 dont l'écriture en base 3 ne contient pas de '1'. Une autre dé-

finition est fondée sur un procédé infini de construction : on prend le segment $[0, 1]$, on en enlève le tiers médian, ce qui donne deux segments $[0, 1/3]$ et $[2/3, 1]$ dont on enlève à chacun le tiers médian, et ainsi de suite. L'ensemble limite, les poussières sur le segment $[0, 1]$, est infiniment fin.

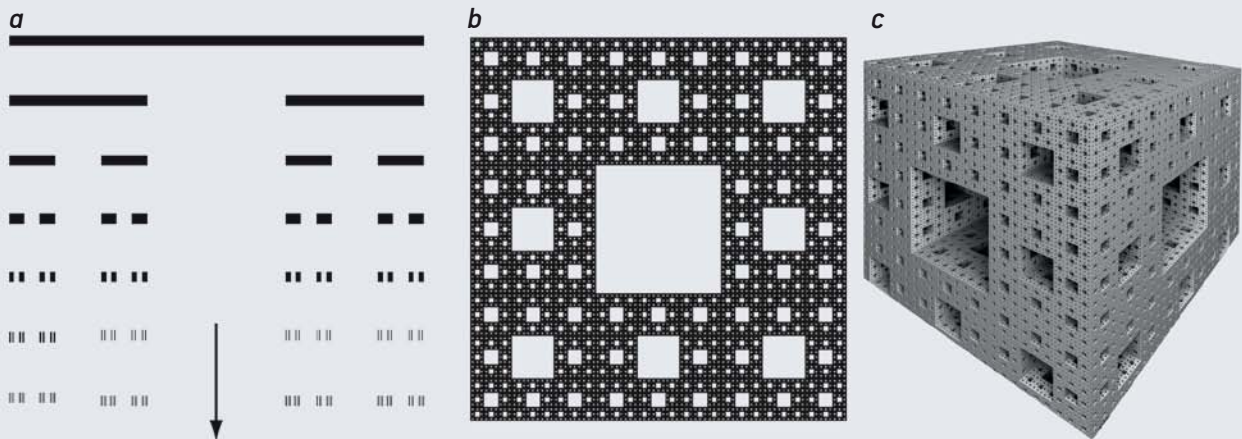
Le tapis de Sierpinski peut aussi être défini par une construction infinie, mais il est plus facile de le définir comme étant l'ensemble de points

du carré $[0, 1] \times [0, 1]$ dont les coordonnées x, y écrites en base 3 n'ont pas un '1' simultanément en même position (pas de '1' pour x et y en première position après le 0, pas de '1' pour x et y en seconde position, etc.).

L'éponge de Menger se définit soit par un procédé de construction infinie (on retire des cubes, de plus en plus petits), soit en disant que c'est l'ensemble des triplets (x, y, z) de nombres réels compris entre 0 et 1, tels que parmi x, y et z , il n'y a ja-

mais deux nombres ayant un '1' en même position de leur développement triadique.

Dans chacun de ces trois exemples, la représentation imagée des ensembles fait saisir concrètement une définition abstraite en termes de développement triadique. Elle permet instantanément de savoir beaucoup de choses sur les ensembles de nombres considérés, par exemple que le tapis et l'éponge sont d'un seul tenant, mais pas la poussière.



Goldbach » : pour chaque nombre pair p , on calcule le nombre k de façons d'écrire p sous la forme d'une somme de deux nombres premiers, et on place le point de coordonnées (n, k) sur un graphe ; cela produit un nuage d'une surprenante régularité (voir l'encadré 3).

Cette forme suggère la présence d'un ordre secret dans le désordre des nombres premiers. Elle apparaît structurée comme une fractale. D'ailleurs, plus on la dessine avec précision, plus nombreuses sont les courbes que l'œil y décèle. Son aspect lisse contraste avec l'irrégularité et l'aléa observés dans la suite 2, 3, 5, 7, 11, 13, On ignore pourquoi ces striures sont si bien organisées selon des règles constantes à tous les ordres de grandeur.

Cependant, la forme de la comète est utile, car elle fournit un argument heuristique, c'est-à-dire intuitif sans être assez

précis pour constituer une preuve mathématique, en faveur de l'hypothèse que tout nombre pair supérieur à 2 est somme de deux nombres premiers. Cette hypothèse, la conjecture de Goldbach, fut proposée en 1742 lors d'échanges épistolaires entre le mathématicien prussien Christian Goldbach et le prolifique et génial mathématicien suisse Leonhard Euler.

Les points les plus bas du nuage s'alignent et dessinent une courbe qui croît vers l'infini quand n augmente. Si ce que voit notre œil est vrai, alors la conjecture de Goldbach est vraie, car le nuage qui monte n'aura jamais de point sur l'axe des abscisses, donc tout entier pair $n \geq 4$ aura au moins une décomposition en somme de deux nombres premiers. Mieux, le nuage suggère la véracité d'une conjecture plus précise et plus difficile, la « conjecture forte de Goldbach » : si, comme on l'observe, le nuage monte toujours, alors

non seulement tout entier pair $n \geq 4$ s'écrit comme somme de deux nombres premiers d'une façon au moins, mais en fait n s'écrit d'un nombre k de façons qui tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

En 2012, le mathématicien australien Terence Tao a démontré que tout nombre impair (à partir de 5) est somme de cinq nombres premiers ou moins, résultat amélioré l'année suivante par Harald Helfgott, qui a prouvé que tout nombre impair ≥ 5 est somme de trois nombres premiers. Ces résultats qui sont des variantes du résultat recherché pour les nombres pairs font espérer que nous approchons d'une vraie démonstration de la conjecture de Goldbach.

Nous nous sommes jusqu'ici intéressés à des ensembles de nombres. Or plusieurs procédés permettent de tirer une image régulière ou aléatoire (parfois d'aspect fractal) d'un seul nombre. Ces

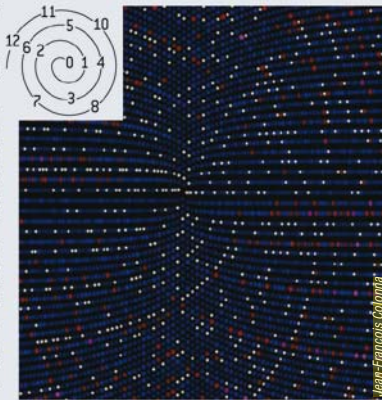
2. Les spirales d'Ulam et de Sacks

La spirale de Stanislaw Ulam (1909-1984) s'obtient en dessinant les nombres entiers sur une spirale carrée, puis en noircissant les nombres premiers. Les alignements obliques de points noirs que l'œil perçoit d'emblée sont d'une étonnante netteté. La formule d'Euler $n^2 - n + 41$ donne des nombres premiers pour n variant de 0 à 40. La formule engendre des nombres premiers dans

47,5 % des cas lorsque n est inférieur à 10 000 000. En utilisant sa spirale, Ulam découvrit d'autres formules du même type qui expliquent certains alignements, sans qu'on sache justifier clairement pourquoi il y en a tant.

La spirale de Robert Sacks a été proposée en 1994 et redécouverte indépendamment par Jean-François Colonna en 1999. On l'obtient en plaçant les nombres entiers sur une spirale

d'Archimède : à chaque tour, la courbe s'éloigne du centre d'une même distance, et sur le tour numéro n , on place les entiers compris entre n^2 et $(n + 1)^2$. Comme pour la spirale d'Ulam, la disposition des nombres premiers fait apparaître un grand nombre de tracés dont la compréhension reste aujourd'hui assez limitée (voir une étude détaillée en <http://www.numberspiral.com/index.html>).



Jean-François Colonna

cartes d'identité visuelles suggèrent des classifications particulières des nombres et des propriétés inconnues, même pour les plus classiques et les plus étudiées des constantes mathématiques.

Nombres zébrés

Les « nombres zébrés » sont définis par une formule simple qui ne semble pas impliquer de régularité particulière pour leurs chiffres. Les nombres de Roland Yéléhada, par exemple, sont ceux de la forme $(10^n - 1)^{1/k}$ où n et k sont deux entiers supérieurs à 2. Leurs chiffres sont organisés en paquets. On y voit de longues séries de '9', séparées par d'autres chiffres. Avec $n = 30$ et $k = 5$, on obtient par exemple :

999 999,999999999999999999999999
999979999999999999999999999999
999991999999999999999999999999
999995199999999999999999999999
999996639999999999999999999999
999997446399999999999999999999
999997957119999999999999999999
999998307327999999999999999999
99999856122879999999999999999

3. La comète de la conjecture de Goldbach

Tout entier pair supérieur à 2 semble s'écrire comme une somme de deux nombres premiers: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 3 + 7 = 5 + 5$, $12 = 5 + 7$, $14 = 3 + 11 = 7 + 7$, etc. Pourtant, nul ne sait le démontrer. La remarque a été faite il y a plus de deux siècles dans un échange de lettres

entre Christian Goldbach et Leonhard Euler. Si, pour chaque entier pair n , on calcule le nombre k de façons d'écrire n comme somme de deux nombres premiers et qu'on place le point de coordonnées (n, k) sur un graphique (les premiers points sont $(4, 1)$, $(6, 1)$, $(8, 1)$, $(10, 2)$, $(12, 1)$, $(14, 2)$, ...), on obtient

un nuage de points nommé comète de Goldbach.

La régularité globale du nuage dessiné, où l'on observe une multitude de stries, et son désordre local apparent illustrent la régularité et l'irrégularité des nombres premiers. Comme pour les spirales de l'encadré 2, on obtient des explica-

tions partielles de ce qu'on voit, mais aucune n'est vraiment générale. D'ailleurs, si l'on savait expliquer et justifier la forme de la courbe limitant le bas du nuage, on prouverait sans doute qu'elle croît indéfiniment quand n augmente, et donc on prouverait la forme forte de la conjecture de Goldbach : le nombre de décompositions en somme de deux nombres premiers de l'entier pair n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Malgré quelques progrès récents sur ce type de problèmes, personne n'a su pour l'instant démontrer la forme classique de la conjecture, et encore moins la forme forte... et donc encore moins justifier les détails de la comète.

