

2. Les spirales d'Ulam et de Sacks

La spirale de Stanislaw Ulam (1909-1984) s'obtient en dessinant les nombres entiers sur une spirale carrée, puis en noirçant les nombres premiers. Les alignements obliques de points noirs que l'œil perçoit d'emblée sont d'une étonnante netteté. La formule d'Euler $n^2 - n + 41$ donne des nombres premiers pour n variant de 0 à 40. La formule engendre des nombres premiers dans 47,5 % des cas lorsque n est inférieur à 100 000 000. En utilisant sa spirale, Ulam découvrit d'autres formules du même type qui expliquent certains alignements, sans qu'on sache justifier clairement pourquoi il y en a tant.

La spirale de Robert Sacks a été proposée en 1994 et redécouverte indépendamment par Jean-François Colonna en 1999. On l'obtient en plaçant les nombres entiers sur une spirale d'Archimède : à chaque tour, la courbe s'éloigne du centre d'une même distance, et sur le tour n , on place les entiers compris entre n^2 et $(n+1)^2$. Comme pour la spirale d'Ulam, la disposition des nombres premiers fait apparaître un grand nombre de tracés dont la compréhension reste aujourd'hui assez limitée (voir une étude détaillée en <http://www.numberspiral.com/index.html>).

Jean-François Colonna

Nombres zébrés

[illegible]

Tout entier pair supérieur à 2 semble s'écrire comme une somme de deux nombres premiers : $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 3 + 7 = 5 + 5$, $12 = 5 + 7$, $14 = 3 + 11 = 7 + 7$, etc. Pourtant, nul ne sait le démontrer. La remarque a été faite il y a plus de deux siècles dans un échange de lettres entre Christian Goldbach et Leonhard Euler. Si, pour chaque entier pair n , on calcule le nombre k de façons d'écrire n comme somme de deux nombres premiers et qu'on place le point de coordonnées (n, k) sur un graphique (les premiers points sont $(4, 1)$, $(6, 1)$, $(8, 1)$, $(10, 2)$, $(12, 1)$, $(14, 2)$, ...), on obtient un nuage de points nommé comète de Goldbach.

La régularité globale du nuage dessiné, où l'on observe une multitude de stries, et son désordre local apparent illustrent la régularité et l'irrégularité des nombres premiers. Comme pour les spirales de l'encadré 2, on obtient des explications partielles de ce qu'on voit, mais aucune n'est vraiment générale. D'ailleurs, si l'on savait expliquer et justifier la forme de la courbe limitant le bas du nuage, on prouverait sans doute qu'elle croît indéfiniment quand n augmente, et donc on prouverait la forme forte de la conjecture de Goldbach : le nombre de décompositions en somme de deux nombres premiers de l'entier pair n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini. Malgré quelques progrès récents sur ce type de problèmes, personne n'a su pour l'instant démontrer la forme classique de la conjecture, et encore moins la forme forte... et donc encore moins justifier les détails de la comète.

Logique & calcul 81