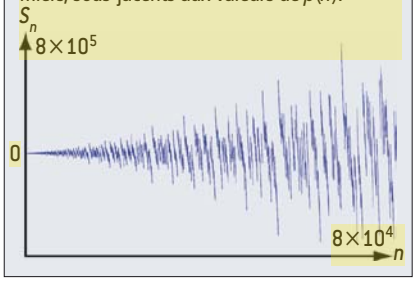
4. Fractale arithmétique

Le mathématicien expérimentateur Benoît Cloitre a observé récemment une fractale simplement tirée des entiers en considérant leur décomposition en produit de facteurs. Notons $p(n)$ le nombre de décompositions possibles d'un entier n en produits. Par exemple, $p(6) = 3$, car 6 peut s'écrire 6 ou 2×3 ou 3×2 ; $p(12) = 8$, car 12 s'écrit 12, 2×6, 6×2, 3×4, 4×3, $2 \times 2 \times 3$, $2 \times 3 \times 2$ ou $3 \times 2 \times 2$. B. Cloitre considère $S_n = p(1) + p(2) + \ldots + p(n) - K(n)$, où $K(n)$ est une fonction simple de n, et représente sur un graphe les points (n, S_n). Cela fait alors surgir une image fractale, qui oscille autour de 0. Un beau sujet d'étude en résulte, qui améliorera peut-être la compréhension des nombres premiers, sous-jacents aux valeurs de $p(n)$.



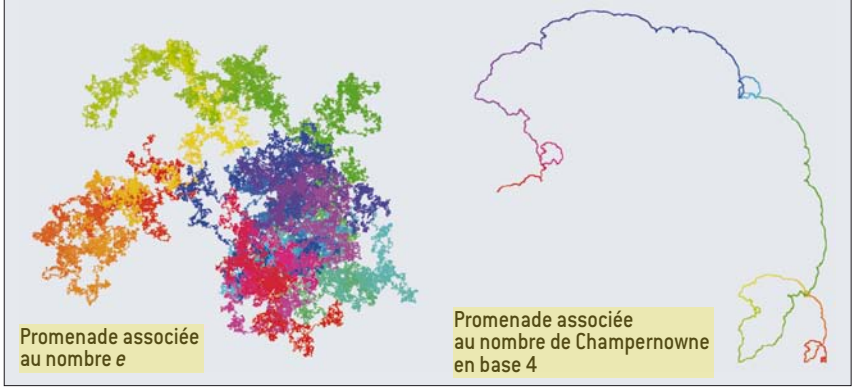
5. Promenade sur un nombre

On lit les chiffres en base 4 du nombre réel r auquel on s'intéresse, et on fait se déplacer un point sur le plan. Selon que le chiffre lu est '0', '1', '2' ou '3', on déplace le point d'une unité vers la droite, vers le haut, vers la gauche ou vers le bas. C'est la promenade associée à r.

L'image d'un million de chiffres de $e = 2{,}7182845\ldots$ donne ainsi une promenade qui ressemble à une marche aléatoire, analogue à celle que le mouvement brownien produit. Il en va de même pour la plupart des irrationnels rencontrés en mathématiques : π, $\ln(2)$, $\sqrt{2}$, etc.

Le nombre de Champernowne en base 4 est ordonné (voir sa définition dans le texte). En conséquence, la promenade correspondante n'est plus du tout celle d'un mouvement brownien, ce que l'œil perçoit de manière évidente. Les images reproduites ont été réalisées par Francisco Aragon Artacho. On en trouvera d'autres en http://walks.carma.newcastle.edu.au/

Les promenades sont dessinées à partir d'un million de chiffres.



Promenade associée au nombre e

Promenade associée au nombre de Champernowne en base 4

99999875306495999999999999999999999890269716479999999999999999999999022402928639999999999999999999912016263577599999999999999999992013783924735999999999999999999269831673118719999999999999999328245...

La longueur des séries non organisées qui séparent les séries uniformes augmente quand on avance dans la suite des chiffres. Le désordre s'y fait un peu attendre, mais, en définitive, il l'emporte.

Promenades sur un plan

Une autre façon d'utiliser les chiffres d'un nombre pour tenter d'y déceler des régularités consiste à leur faire construire des parcours du plan qui, dans le cas de nombres aux décimales aléatoires, seront analogues aux tracés laissés par une particule soumise au mouvement brownien. On prendra par exemple le nombre $e = 2{,}71828\ldots$ (base du logarithme népérien) qu'on écrira en base 4. Partant d'un point quelconque du plan, on lira de gauche à droite les chiffres de e, un à un, en déplaçant le point courant d'une unité vers la droite si le chiffre lu est '0', d'une unité vers le haut si c'est un '1', d'une unité vers la gauche si c'est un '2', et d'une unité vers le bas si c'est un '3'. Ce point ainsi promené sur le plan suit un cheminement qui reflète les propriétés du nombre réel étudié *(voir l'encadré 5)*.

La page Web http://gigapan.com/gigapans/106803 propose une image très détaillée du parcours obtenu avec 100 milliards de chiffres de π. Sa taille est de 372 224 pixels sur 290 218, soit plus de 108 milliards de pixels. C'est peut-être la plus grande image mathématique jamais calculée.

Le plus souvent, ce procédé de construction d'une image associée à un nombre ne montre rien de bien particulier. La courbe obtenue présente le même aspect général que les courbes provenant des lancers d'un dé équitable à quatre faces (cela existe !), le tout ressemblant à un mouvement brownien.

Il y a quelques exceptions, dont le nombre de Champernowne de la base 4. Il s'agit du nombre réel Ch4 dont les chiffres sont constitués des entiers écrits en base 4 (1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33, etc.) mis les uns derrière les autres, ce qui donne : Ch4 =0,12310111 2132021222330313233...

Le parcours associé est très différent d'un mouvement brownien. Mais ce n'est pas étonnant, puisque la définition du nombre de Champernowne résulte d'un choix particulier très structuré des chiffres. Comme pour le nombre qui produirait pixel par pixel votre portrait, on ne trouve dans l'image de ce chemin que ce qu'on y a mis en le définissant. D'ailleurs, on peut aussi fabriquer un nombre dont l'image par le procédé de la promenade sera votre portrait, cette fois dessiné à l'aide d'un trait continu !

Le mathématicien expérimentateur B. Cloitre a exploré d'autres procédés de