

6. Les figurations de nombres de Benoît Cloitre

Les promenades obtenues directement à partir des chiffres d'un nombre (voir l'encadré 5) sont, sauf dans de rares cas, décevantes et produisent des résultats d'allure semblable à une marche aléatoire. Mais Benoît Cloitre a découvert un intéressant procédé de choix de la direction de déplacement du point courant.

Un nombre réel r étant donné, avec deux paramètres entiers a et b (par exemple 3 et 1), il calcule la partie entière du produit $r(an + b)$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, puis, selon que le résultat est pair ou impair, il fait

tourner la direction de déplacement du point courant de $\pi/3$ ou de $-2\pi/3$ (d'autres angles peuvent être choisis et donnent aussi de surprenants résultats). On observe des promenades qui, cette fois, ne sont en rien aléatoires et qui, selon le nombre r , dessinent des figures géométriques complexes, mais toutes très spécifiques des nombres essayés. Pour chaque r , on est tenté de considérer le dessin produit comme une empreinte digitale de r (*digit* veut dire chiffre en anglais).

B. Cloitre a tiré plusieurs conclusions de l'étude de ses promenades.

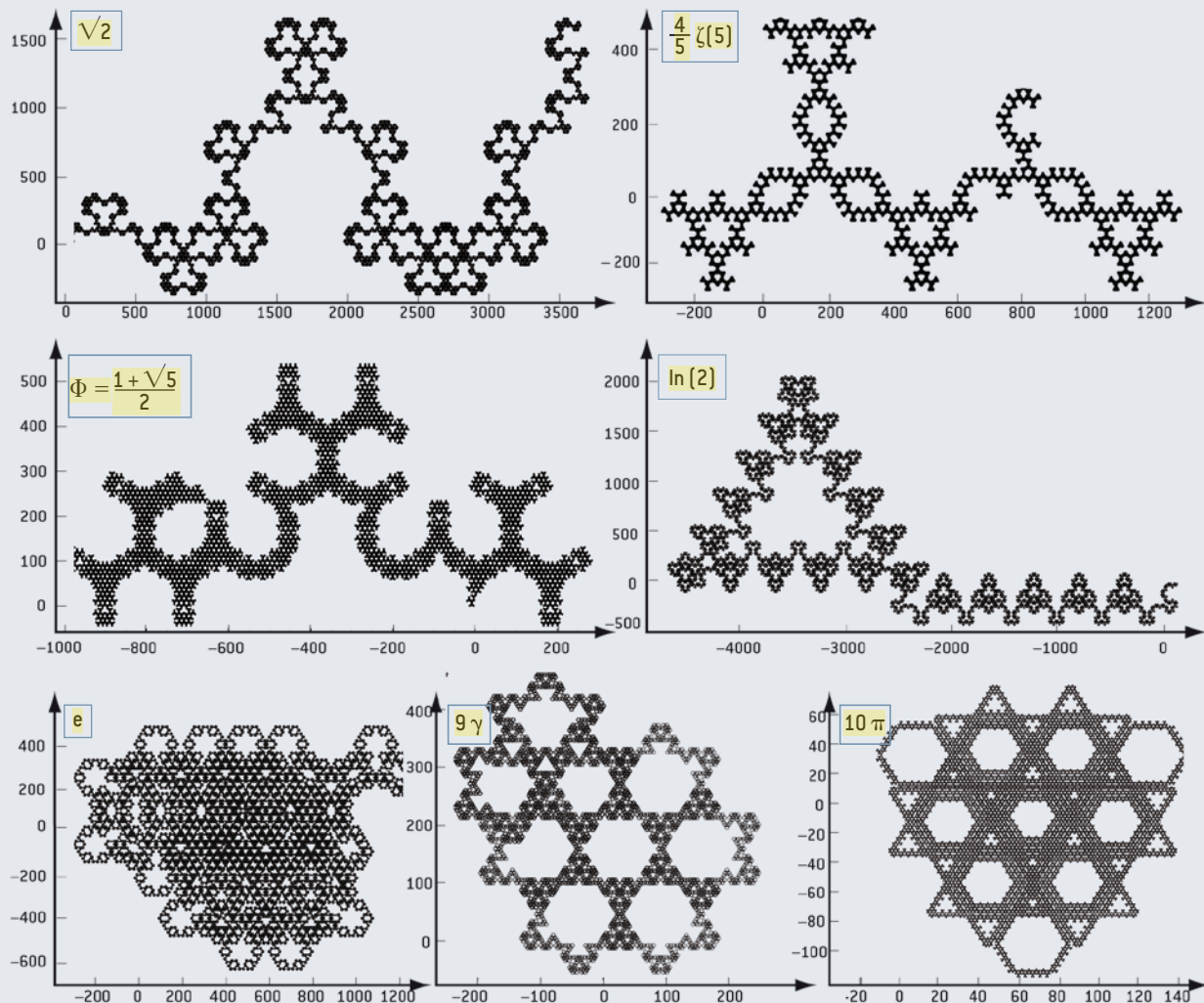
- Si le chemin est non borné et ne reste pas entre deux parallèles, alors la constante est irrationnelle (l'inverse n'est pas toujours vrai). Cette propriété (démontrée) fournit un outil pour prédire la nature irrationnelle ou non d'une constante.

- Les promenades sont souvent autosimilaires (on retrouve la forme générale en plus petit dans l'image). À chaque nombre, le procédé de B. Cloitre donne ainsi le moyen d'associer une forme d'allure fractale.

- On note des différences significatives entre les constantes. Les chemins pour $\sqrt{2}$ et ϕ (le nombre

d'or) se développent plus vite et ont plus d'amplitude le long de l'axe des x . Pour les multiples de π et de la constante mathématique γ (la limite de $1+1/2+1/3+\dots+1/n-\ln(n)$ quand n tend vers l'infini), il y a beaucoup de recouvrements et le cheminement se tasse. De toute évidence, ces promenades rendent visuelles des propriétés profondes des nombres.

Ici, chaque promenade est dessinée pour 1 500 000 étapes, pour $a = 1$ et $b = 0$. Voir : <https://dl.dropboxusercontent.com/u/46675017/FractalWalks16oct.pdf>



Benoît Cloitre

7. Les rideaux fractals

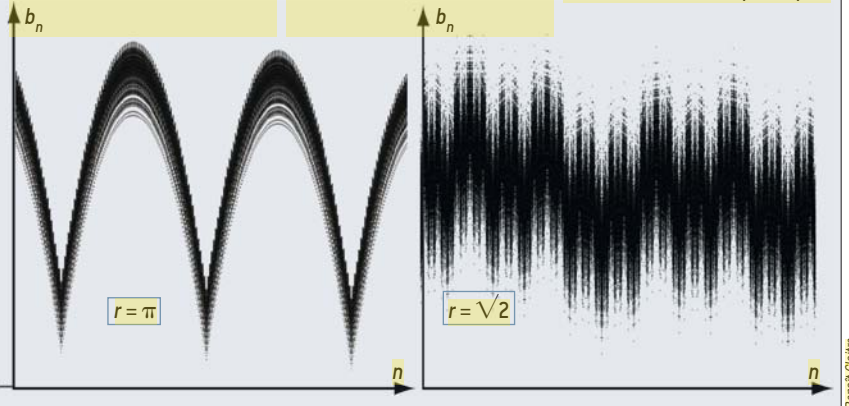
Un procédé inédit d'obtention d'empreintes de nombres a été récemment proposé par B. Cloitre.

Pour chaque nombre réel r , on s'intéresse à ses multiples $r, 2r, 3r, \dots$ dont on ne retient que la partie après la virgule. Pour $r = \pi$, on considère ainsi :

$r = 3,1415926 \rightarrow a_1 = 0,1415926$
 $2r = 6,28318530 \rightarrow a_2 = 0,28318530$
 $3r = 9,424777 \rightarrow a_3 = 0,424777$,
 et ainsi de suite.

On calcule les sommes $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ de ces nombres. Comme chaque terme oscille autour de $1/2$, la somme a une valeur autour de $n/2$.

Pour obtenir une valeur centrée, on utilise donc le nombre $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n - n/2$. En représentant de nombreuses valeurs de b_n (c'est-à-dire des points de coordonnées (n, b_n)), le dessin obtenu est, comme avec les promenades de l'encadré 6, structuré et spécifique.



Benoît Cloitre

construction de promenades sur le plan dont la définition se fonde, comme précédemment, sur un nombre réel unique. Ces procédés produisent bien d'autres choses que des mouvements browniens et, avec eux, les constantes préférées des mathématiciens deviennent visuellement distinctes [voir l'encadré 6].

Ces méthodes engendrent des images qui personnalisent les nombres et semblent exhiber leur identité profonde. La structure visuelle est très différente d'un nombre à l'autre, confirmant ce que bien des mathématiciens avaient perçu : chaque nombre a une identité cachée dans ses chiffres. L'image ainsi associée à un nombre peut être vue comme son empreinte « digitale » ou, pourquoi pas, son génome.

Avant B. Cloitre, d'autres méthodes avaient parfois réussi à faire ainsi émerger des images structurées des constantes, mais les procédés qu'il propose sont plus simples et énigmatiques. On est loin de comprendre ce qui se passe, mais déjà B. Cloitre en tire des conjectures et des arguments heuristiques. Ainsi, grâce aux promenades, il semble que la constante $\zeta(5)$ [la somme

infinie des $1/n^5$], dont on ignore aujourd'hui la nature, soit un nombre irrationnel.

Pour terminer, signalons encore une trouvaille toute récente de B. Cloitre : un procédé qui, comme ses promenades, associe des cartes de visite clairement distinctes aux constantes irrationnelles, cette fois sous la forme de « rideaux » géométriques [voir l'encadré 7] que l'on soupçonne être fractals (ce qu'on ne sait pas démontrer aujourd'hui).

De nouvelles formes de la beauté mathématique

Pour l'instant, nul ne sait ce que l'on réussira à tirer mathématiquement de ces dessins personnalisés des nombres. Il est cependant probable que les comprendre nous aidera à percer quelques mystères arithmétiques. Le mathématicien, s'il ne sait pas encore lire sur ces images géométriques, ne peut manquer de se réjouir de voir ses constantes préférées se dévoiler et révéler de nouvelles formes, jusque-là inconnues, de la beauté mathématique. ■

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

Site de Benoît Cloitre, consulté en novembre 2013 : <http://bcmathematics.monsite-orange.fr/>

B. Cloitre, *Fractal curtains of irrational numbers*, 2013, <https://dl.dropboxusercontent.com/u/46675017/Fractalcurtains.pdf>

F. Aragon Artacho et al., *Walking on real numbers*, *Mathematical Intelligencer*, vol. 35(1), pp. 42-60, 2013 http://rua.ua.es/dspace/stream/10045/29042/1/2013_Aragon_et_al_MathIntell.pdf

K. Cooney, *Visualising prime numbers*, *The Irish Undergraduate Mathematical Magazine*, vol. 1, pp. 17-26, 2012.

J.-P. Delahaye, *Être normal, pas si facile !*, *Pour la Science* n°422, pp. 126-131, décembre 2012.

R. Sacks, *Number spiral*, 2007, www.numberspiral.com

J.-P. Delahaye, *Les nombres zébrés*, *Pour la Science* n° 301, pp. 90-95, juillet 2004.