

LOGIQUE & CALCUL

Une théorie rêvée du calcul

Les mathématiciens créent des mondes imaginaires et s'interrogent sur ce qui s'y passe. Celui conçu par Jérôme Durand-Lose concilie simplicité et richesse infinie.

Jean-Paul DELAHAYE

De simples particules interagissant selon des règles fixées permettent-elles de réaliser des calculs et, si oui, lesquels ?

Pour le savoir, Jérôme Durand-Lose, professeur à l'Université d'Orléans, a proposé le modèle mathématique d'un univers ne contenant que des particules mobiles qu'il nomme « signaux ». Dans ce monde imaginaire, l'espace est une droite (un espace à une dimension). La droite où les signaux circulent est assimilée à la droite mathématique, c'est-à-dire à l'ensemble infini des nombres réels $\{1, -7, 23/11, \sqrt{3}, \text{etc.}\}$. Le temps est lui aussi continu et représenté à l'aide de nombres réels. Cette idéalisation n'est pas sans conséquence, mais elle est habituelle en physique où ces nombres sont utilisés en particulier dans les représentations de l'espace et du temps.

Les résultats obtenus par J. Durand-Lose et ses étudiants nous montrent les risques inhérents au passage de modèles où tout est discret – espaces composés de points isolés, temps représenté par des entiers – à des espaces continus envisagés sans restriction, avec toutes les richesses que les mathématiciens y découvrent et qui n'ont pas toutes de correspondance en physique.

Pour saisir les mondes étudiés par J. Durand-Lose depuis plus de dix ans, observons en détail l'un d'eux, qui aura la propriété de se reproduire périodiquement. Les signaux qu'il utilise sont au nombre de sept. Ce sont des points mobiles. On les dessine de cou-

leurs différentes et on les désigne par leur couleur. Chaque signal a sa propre vitesse et il n'en change jamais. Cette vitesse est un nombre réel. Dans notre exemple :

- le signal *noir* a la vitesse nulle ;
- le *bleu* et le *jaune* ont la vitesse 1 ; ils se déplacent vers la droite d'une unité de longueur par unité de temps ;
- le *vert* a la vitesse 2 ;
- le *rouge* a la vitesse -2 ; il se déplace vers la gauche de deux unités de longueur par unité de temps ;
- l'*orange* et le *violet* ont la vitesse -1 .

Les signaux interagissent quand ils se rencontrent et, après annihilation, donnent naissance à de nouveaux signaux. On peut voir ces signaux comme des particules ponctuelles. La situation est analogue à celle de la physique des particules, à la nuance près que le mathématicien conçoit et étudie en toute liberté les particules qui l'intéressent, alors que le physicien mène des expériences pour savoir quelles sont les particules existant réellement.

Dressons la liste des interactions possibles des sept types de signaux de notre exemple. Chaque ligne indique ce que la collision de deux signaux (*à gauche*) produit comme nouveaux signaux (*à droite*).

- Règle 1 : *bleu, noir* → *noir, vert*
- Règle 2 : *vert, noir* → *noir, jaune*
- Règle 3 : *jaune, noir* → *orange, noir*
- Règle 4 : *noir, orange* → *rouge, noir*
- Règle 5 : *noir, rouge* → *violet, noir*
- Règle 6 : *noir, violet* → *noir, bleu*

Quand une collision entre deux signaux n'est pas mentionnée – c'est le cas pour *jaune, orange* – les deux signaux se croisent sans interagir. Quand plus de deux signaux se rencontrent en un point, on considère que toutes les règles correspondant à deux signaux présents et interagissants s'appliquent. Par exemple, si les signaux *orange, vert* et *noir* se rencontrent, les règles 2 et 4 s'appliquent, d'où la règle :

vert, noir, orange → *noir, jaune, rouge*.

De telles super-règles peuvent être introduites si on le souhaite. L'évolution de l'univers à une dimension se visualise à l'aide d'un schéma où, par convention, l'écoulement du temps correspond au déplacement vers le haut. Le schéma *a* de l'encadré 1 montre ce qui se produit dans le cas particulier que nous venons de définir quand on place sept signaux aux positions initiales suivantes : quatre signaux *noir* en 0, 1, 3 et 4 ; un signal *bleu* en 0 ; un signal *vert* en 1 ; un signal *jaune* en 3.

Éternel recommencement

On observe qu'après une unité de temps, le signal *bleu* parti de la position 0 rencontre le signal *noir* qui est immobile en position 1. Leur collision donne naissance (d'après la règle 1) à un signal *noir* (qui prolonge donc le signal *noir* en position 1) et un signal *vert* deux fois plus rapide que le *bleu*, qui disparaît. Il y a de même interaction, à l'instant 1, entre le signal *vert* parti de la position 1 et

1. Le petit monde des signaux

Le monde des signaux inventé par Jérôme Durand-Lose est unidimensionnel. On représente son évolution en plaçant l'axe du temps verticalement. Dans notre premier exemple (a), on a sept particules (ou signaux) à l'instant initial ($t = 0$). Chacune, selon sa couleur, a une vitesse propre. Par exemple, les signaux *jaune* se déplacent vers la droite à la vitesse d'une unité de longueur par unité de temps (vitesse 1). Lorsque deux signaux se rencontrent, ils interagissent, ce qui donne naissance à des signaux diffé-

rents selon des règles fixées une fois pour toutes. Ici, la rencontre d'un signal *bleu* de vitesse +1 avec un signal *noir* de vitesse 0 produit un signal *vert* de vitesse +2 et un signal *noir* (de vitesse 0). Le petit monde dessiné ici est décrit en détail dans le texte de l'article. Au bout de six unités de temps, il retrouve l'état initial, et donc tout se répète indéfiniment toutes les six unités de temps.

Le choix des signaux et de leur configuration initiale permet de calculer. Cette programmation géomé-

trique est intéressante, car elle permet de profiter du caractère continu de l'espace-support et donc de toute la richesse de l'ensemble des nombres réels.

Dans ce monde des signaux, quatre d'entre eux peuvent jouer une partie de ping-pong en produisant un point d'accumulation d'interactions (b). En modifiant légèrement les règles (lorsque le *bleu* et le *violet* du dessin (b) se rencontrent, au lieu de produire un *jaune* et un *bleu*, on convient qu'ils produisent

un *jaune*, un *bleu* et un *vert*, ce qui donne alors le dessin (c)), il est facile d'obtenir qu'un nombre fini de signaux en produisant une infinité en un temps fini. Une forme de calcul infini est donc possible dans le monde des signaux de J. Durand-Lose. Un autre système assez simple de signaux produit une ligne complète de points d'accumulation (d). Un autre encore produit un ensemble de points d'accumulation correspondant exactement à l'ensemble triadique de Cantor (e).

