

1. Le petit monde des signaux

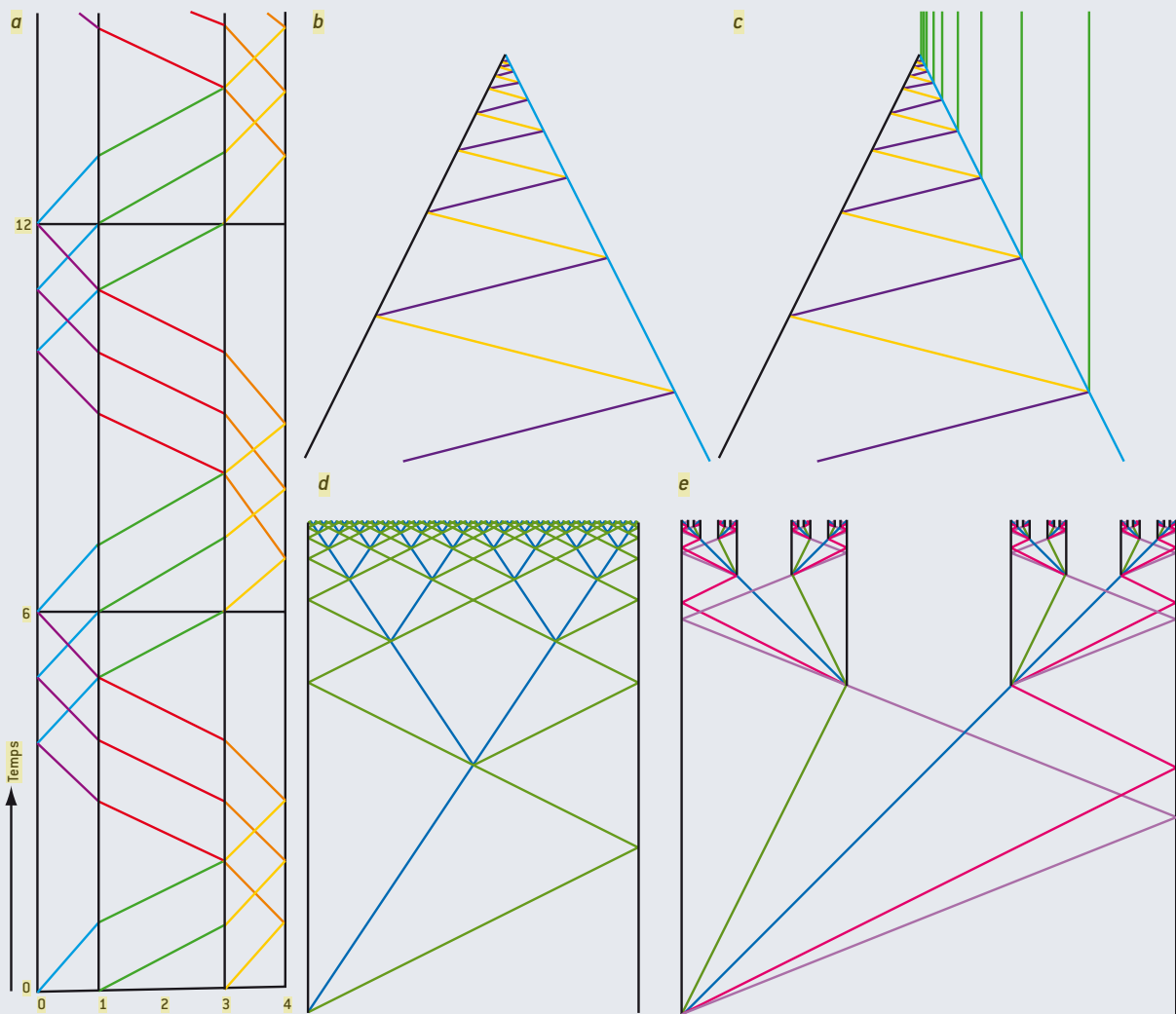
Le monde des signaux inventé par Jérôme Durand-Lose est unidimensionnel. On représente son évolution en plaçant l'axe du temps verticalement. Dans notre premier exemple (a), on a sept particules (ou signaux) à l'instant initial ($t = 0$). Chacune, selon sa couleur, a une vitesse propre. Par exemple, les signaux *jaune* se déplacent vers la droite à la vitesse d'une unité de longueur par unité de temps (vitesse 1). Lorsque deux signaux se rencontrent, ils interagissent, ce qui donne naissance à des signaux diffé-

rents selon des règles fixées une fois pour toutes. Ici, la rencontre d'un signal *bleu* de vitesse +1 avec un signal *noir* de vitesse 0 produit un signal *vert* de vitesse +2 et un signal *noir* (de vitesse 0). Le petit monde dessiné ici est décrit en détail dans le texte de l'article. Au bout de six unités de temps, il retrouve l'état initial, et donc tout se répète indéfiniment toutes les six unités de temps.

Le choix des signaux et de leur configuration initiale permet de calculer. Cette programmation géométrique est intéressante, car elle permet de profiter du caractère continu de l'espace-support et donc de toute la richesse de l'ensemble des nombres réels.

Dans ce monde des signaux, quatre d'entre eux peuvent jouer une partie de ping-pong en produisant un point d'accumulation d'interactions (b). En modifiant légèrement les règles (lorsque le *bleu* et le *violet* du dessin (b) se rencontrent, au lieu de produire un *jaune* et un *bleu*, on convient qu'ils produisent

un *jaune*, un *bleu* et un *vert*, ce qui donne alors le dessin (c)), il est facile d'obtenir qu'un nombre fini de signaux en produisant une infinité en un temps fini. Une forme de calcul infini est donc possible dans le monde des signaux de J. Durand-Lose. Un autre système assez simple de signaux produit une ligne complète de points d'accumulation (d). Un autre encore produit un ensemble de points d'accumulation correspondant exactement à l'ensemble triadique de Cantor (e).



le signal *noir* immobile en position 3 ; elle donne naissance, d'après la règle 2, à un signal *noir* et un signal *jaune*. Etc.

La définition des signaux, leurs positions initiales et les règles d'interaction déterminent parfaitement ce qui se passe au-delà de l'instant 0. Les mondes que l'on fabrique à l'aide de ce type de modèles sont déterministes : tout est donné au départ, aucun hasard n'intervient. Pour obtenir de ces mondes qu'ils calculent, il faudra donc soigneusement choisir les signaux, leurs règles et les positions initiales.

Dans notre exemple, le calcul produit une évolution assez simple à analyser. Les signaux *noir* sont fixes et se perpétuent indéfiniment. Les signaux initiaux *bleu*, *vert* et *jaune* se transforment en signaux d'autres couleurs qui sont réfléchis sur les signaux *noir* et reviennent simultanément à leur point de départ en six étapes. Au bout de six unités de temps, l'univers se retrouve donc dans son état initial : il est cyclique. Cet univers rejoue indéfiniment les mêmes événements. C'est un peu décevant, mais ce n'est qu'un début.

Dans les autres schémas représentant des univers de signaux (voir l'encadré 1), nous n'indiquerons pas toujours la liste des signaux, ni leurs vitesses et règles d'interaction, car en regardant les dessins, on reconstitue sans mal ces données. Bien sûr, pour qu'un dessin représente une évolution possible dans un monde de signaux, il faut que les mêmes règles exactement y soient appliquées d'un endroit à l'autre du dessin.

Points d'accumulation

La figure *b* illustre un phénomène très important pour la suite : la possibilité d'obtenir des points d'accumulation de collisions. Les quatre signaux de ce monde jouent une sorte de ping-pong de plus en plus rapide. Le signal *noir* et le signal *bleu* se rapprochent. Dans l'espace créé entre eux, le signal *violet* qui devient *jaune* puis à nouveau *violet*, puis à nouveau *jaune*, etc., interagit de plus en plus rapidement avec les signaux *noir* et *bleu*. Une infinité de collisions entre signaux se produisent avant un instant particulier qu'on dénomme *point d'accumulation*, et

qui correspond exactement au temps que le signal *noir* met à rejoindre le signal *bleu*. Que se passe-t-il en ce point limite ? Aucune des règles du jeu ne l'indique. Il faut donc compléter ces règles pour traiter de tels cas. Le plus simple est de convenir que tous les signaux disparaissent, comme s'ils tombaient dans un trou noir.

Le schéma *c* montre que, même avec cette convention, on ne peut éviter qu'apparaissent des situations où une infinité de signaux sont créés en un temps fini. Notons cependant que si l'on choisit d'affecter une masse à chaque particule et qu'on impose que chaque règle préserve la masse totale, alors ce type de phénomènes devient impossible : partant d'un nombre fini de particules ayant chacune une masse finie, on ne peut aboutir à une infinité de particules.

Le schéma *d* montre une situation extraordinaire où non seulement un point d'accumulation est créé, mais où c'est tout un segment qui se remplit de points d'accumulation. Le schéma *e* est encore plus troublant : l'ensemble des points d'accumulation est l'ensemble triadique de Cantor (mentionné dans l'article du mois de février 2014) qui est la première fractale, imaginée il y a bientôt 150 ans.

On doit conclure de ces exemples que les mondes de signaux de J. Durand-Lose ne sont pas tout à fait réalistes. Les définir à partir de l'ensemble des nombres réels utilisé sans précaution et assimiler les signaux à des points mobiles sans épaisseur a pour conséquence que l'infiniment petit (dont la physique n'accepte pas vraiment l'existence) se manifeste et produit d'étranges situations qui semblent impossibles dans notre univers. L'infiniment petit produit des points d'accumulation, des signaux en nombre infini et même les fractales deviennent réelles. Dans notre monde, les fractales n'existent que comme limite jamais atteinte, on en trouve et on en produit sous forme approximative. Ici, dans le monde des signaux, elles sont pleinement possibles, avec l'infinie finesse de leurs détails.

Même si le physicien se méfie, le mathématicien n'a pas peur de ces mondes idéaux ; au contraire, il les trouve intéressants. La question « Que peut-on calculer dans un

monde de signaux ? » y devient délicate et... passionnante. Elle se décompose en trois questions que nous allons aborder successivement.

– Est-ce que tout calcul faisable dans un monde discret classique est faisable dans un monde de signaux à une dimension ?

– Les points d'accumulation rendent-ils réalisables des calculs impossibles dans un monde discret classique ? Si oui, lesquels ?

– Certains calculs que le monde discret classique ne permet pas de mener rapidement peuvent-ils l'être ici ? Qu'en est-il en particulier des problèmes NP-complets ?

Montrons d'abord comment les signaux peuvent effectuer des soustractions et du calcul modulaire.

Calculs classiques

La figure de gauche de l'encadré 2 représente un monde dans lequel se fait une soustraction. Pour réaliser la soustraction $a - b$, on place trois particules immobiles à distances 0, a et b de l'origine (on les nomme w_0 , w_a , w_b). On lance alors du point d'abscisse -1 une particule de vitesse 1 nommée « init ». Après cinq collisions de particules, une particule w_r immobile est créée ; elle donne le résultat de la soustraction, car elle est située exactement à une distance $a - b$ de l'origine. Durant le calcul, les particules w_a et w_b qui portaient les données initiales du calcul ont été annihilées, mais il serait facile de changer un peu les règles pour préserver ces données. Vérifier que la particule w_r est bien placée à une distance de l'origine exige un petit raisonnement géométrique... que nous vous laissons le plaisir de détailler.

On remarquera que l'algorithme de calcul géométrique proposé – il s'agit bien de cela – fonctionne avec n'importe quelles données, y compris avec des données irrationnelles comme π ou e , et calcule donc sans la moindre erreur $\pi - e$, si l'on suppose correctement placées au départ les particules associées à π et à e . Le monde des signaux sait faire des soustractions parfaites entre nombres réels quelconques, ce qu'évidemment aucun mécanisme physique de notre monde ne sait réaliser, du