

le signal *noir* immobile en position 3 ; elle donne naissance, d'après la règle 2, à un signal *noir* et un signal *jaune*. Etc.

La définition des signaux, leurs positions initiales et les règles d'interaction déterminent parfaitement ce qui se passe au-delà de l'instant 0. Les mondes que l'on fabrique à l'aide de ce type de modèles sont déterministes : tout est donné au départ, aucun hasard n'intervient. Pour obtenir de ces mondes qu'ils calculent, il faudra donc soigneusement choisir les signaux, leurs règles et les positions initiales.

Dans notre exemple, le calcul produit une évolution assez simple à analyser. Les signaux *noir* sont fixes et se perpétuent indéfiniment. Les signaux initiaux *bleu*, *vert* et *jaune* se transforment en signaux d'autres couleurs qui sont réfléchis sur les signaux *noir* et reviennent simultanément à leur point de départ en six étapes. Au bout de six unités de temps, l'univers se retrouve donc dans son état initial : il est cyclique. Cet univers rejoue indéfiniment les mêmes événements. C'est un peu décevant, mais ce n'est qu'un début.

Dans les autres schémas représentant des univers de signaux (voir l'encadré 1), nous n'indiquerons pas toujours la liste des signaux, ni leurs vitesses et règles d'interaction, car en regardant les dessins, on reconstitue sans mal ces données. Bien sûr, pour qu'un dessin représente une évolution possible dans un monde de signaux, il faut que les mêmes règles exactement y soient appliquées d'un endroit à l'autre du dessin.

Points d'accumulation

La figure *b* illustre un phénomène très important pour la suite : la possibilité d'obtenir des points d'accumulation de collisions. Les quatre signaux de ce monde jouent une sorte de ping-pong de plus en plus rapide. Le signal *noir* et le signal *bleu* se rapprochent. Dans l'espace créé entre eux, le signal *violet* qui devient *jaune* puis à nouveau *violet*, puis à nouveau *jaune*, etc., interagit de plus en plus rapidement avec les signaux *noir* et *bleu*. Une infinité de collisions entre signaux se produisent avant un instant particulier qu'on dénomme *point d'accumulation*, et

qui correspond exactement au temps que le signal *noir* met à rejoindre le signal *bleu*. Que se passe-t-il en ce point limite ? Aucune des règles du jeu ne l'indique. Il faut donc compléter ces règles pour traiter de tels cas. Le plus simple est de convenir que tous les signaux disparaissent, comme s'ils tombaient dans un trou noir.

Le schéma *c* montre que, même avec cette convention, on ne peut éviter qu'apparaissent des situations où une infinité de signaux sont créés en un temps fini. Notons cependant que si l'on choisit d'affecter une masse à chaque particule et qu'on impose que chaque règle préserve la masse totale, alors ce type de phénomènes devient impossible : partant d'un nombre fini de particules ayant chacune une masse finie, on ne peut aboutir à une infinité de particules.

Le schéma *d* montre une situation extraordinaire où non seulement un point d'accumulation est créé, mais où c'est tout un segment qui se remplit de points d'accumulation. Le schéma *e* est encore plus troublant : l'ensemble des points d'accumulation est l'ensemble triadique de Cantor (mentionné dans l'article du mois de février 2014) qui est la première fractale, imaginée il y a bientôt 150 ans.

On doit conclure de ces exemples que les mondes de signaux de J. Durand-Lose ne sont pas tout à fait réalistes. Les définir à partir de l'ensemble des nombres réels utilisé sans précaution et assimiler les signaux à des points mobiles sans épaisseur a pour conséquence que l'infiniment petit (dont la physique n'accepte pas vraiment l'existence) se manifeste et produit d'étranges situations qui semblent impossibles dans notre univers. L'infiniment petit produit des points d'accumulation, des signaux en nombre infini et même les fractales deviennent réelles. Dans notre monde, les fractales n'existent que comme limite jamais atteinte, on en trouve et on en produit sous forme approximative. Ici, dans le monde des signaux, elles sont pleinement possibles, avec l'infinie finesse de leurs détails.

Même si le physicien se méfie, le mathématicien n'a pas peur de ces mondes idéaux ; au contraire, il les trouve intéressants. La question « Que peut-on calculer dans un

monde de signaux ? » y devient délicate et... passionnante. Elle se décompose en trois questions que nous allons aborder successivement.

– Est-ce que tout calcul faisable dans un monde discret classique est faisable dans un monde de signaux à une dimension ?

– Les points d'accumulation rendent-ils réalisables des calculs impossibles dans un monde discret classique ? Si oui, lesquels ?

– Certains calculs que le monde discret classique ne permet pas de mener rapidement peuvent-ils l'être ici ? Qu'en est-il en particulier des problèmes NP-complets ?

Montrons d'abord comment les signaux peuvent effectuer des soustractions et du calcul modulaire.

Calculs classiques

La figure de gauche de l'encadré 2 représente un monde dans lequel se fait une soustraction. Pour réaliser la soustraction $a - b$, on place trois particules immobiles à distances 0, a et b de l'origine (on les nomme w_0 , w_a , w_b). On lance alors du point d'abscisse -1 une particule de vitesse 1 nommée « init ». Après cinq collisions de particules, une particule w_r immobile est créée ; elle donne le résultat de la soustraction, car elle est située exactement à une distance $a - b$ de l'origine. Durant le calcul, les particules w_a et w_b qui portaient les données initiales du calcul ont été annihilées, mais il serait facile de changer un peu les règles pour préserver ces données. Vérifier que la particule w_r est bien placée à une distance de l'origine exige un petit raisonnement géométrique... que nous vous laissons le plaisir de détailler.

On remarquera que l'algorithme de calcul géométrique proposé – il s'agit bien de cela – fonctionne avec n'importe quelles données, y compris avec des données irrationnelles comme π ou e , et calcule donc sans la moindre erreur $\pi - e$, si l'on suppose correctement placées au départ les particules associées à π et à e . Le monde des signaux sait faire des soustractions parfaites entre nombres réels quelconques, ce qu'évidemment aucun mécanisme physique de notre monde ne sait réaliser, du

2. Effectuer une soustraction et un calcul modulaire

Pour réaliser des calculs avec des signaux, on place à l'instant 0 des signaux en des positions représentant les nombres sur lesquels on veut opérer. Ici (figure de gauche), pour faire la soustraction $a - b$, on place

un signal en position a et un autre en position b . Le système décrit dans la figure réalise en quelques collisions de signaux le calcul de la soustraction. Le résultat est inscrit dans l'univers unidimensionnel en considérant

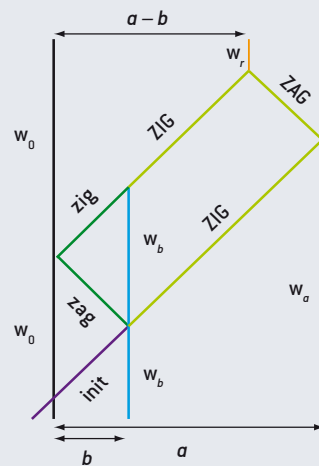
la distance qui sépare les deux signaux qui restent à l'issue des interactions. L'algorithme géométrique de soustraction fonctionne avec des nombres réels quelconques, même s'ils sont irrationnels comme π ou

$\sqrt{5}$, et produit le résultat sans la moindre erreur.

La figure de droite montre l'algorithme géométrique de calcul du reste de la division de a par b (calcul de a modulo b).

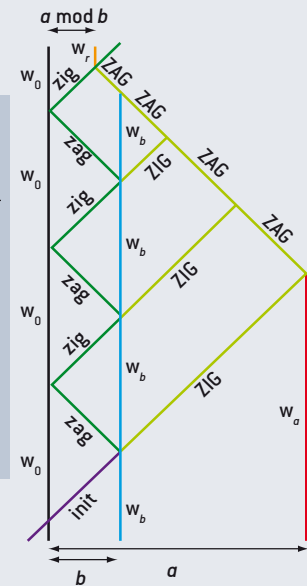
init, zig, ZIG	1
w_0, w_a, w_b, w_r	0
zag, ZAG	-1

init, w_b	→ zag, w_b , ZIG
w_0 , zag	→ w_0 , zig
zig, w_b	→ ZIG
ZIG, w_a	→ ZAG
w_b , ZAG	→ ZAG, w_b
ZIG, ZAG	→ w_r
zig, ZAG	→ w_r
zig, w_b , ZAG	→ w_r



init, zig, ZIG	1
w_0, w_a, w_b, w_r	0
zag, ZAG	-1

init, w_b	→ zag, w_b , ZIG
w_0 , zag	→ w_0 , zig
zig, w_b	→ zag, w_b , ZIG
ZIG, w_a	→ ZAG
w_b , ZAG	→ ZAG
zig, w_b , ZAG	→ ZAG
ZIG, ZAG	→ ZAG
zig, ZAG	→ w_r
w_0 , ZAG	→ w_0



fait du mouvement brownien et plus généralement du fait que, pour un physicien, aucune constante ou valeur physique n'est vraiment assimilable à un nombre réel avec son infinité de décimales : les physiciens utilisent les nombres réels, mais ils n'y croient pas vraiment !

La figure de droite de l'encadré 2 montre le déroulement du calcul de « $11 \bmod 3$ » (le reste de la division euclidienne de 11 par 3). En poursuivant l'étude de ces calculs avec signaux, on découvre progressivement que tout ce qu'un programme d'ordinateur (discret) calcule, une configuration convenable de signaux le fait aussi. Puisqu'il existe des méthodes permettant d'énumérer les nombres premiers, il existe une façon de définir des signaux calculant les nombres premiers, par exemple en créant des particules immobiles placées progressivement en position 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc. On dit du modèle de calcul par signaux qu'il est « computationnellement universel ».

Bien que tout se déroule dans un univers à une seule dimension, et que les seuls objets de ce monde soient des signaux, tout calcul réalisable par un ordinateur habituel (qui calcule avec des entiers et effectue des opérations entre quantités discrètes), peut-être mené. Pour effectuer les calculs, on n'a d'ailleurs jamais besoin d'exploiter les points d'accumulation. Il suffit de ne considérer que des signaux ayant des nombres entiers pour vitesse, placés à l'instant initial en des positions à coordonnées entières et interagissant à des instants qui seront des nombres entiers. Le monde des signaux réduit à la droite des nombres entiers et fonctionnant en temps discret possède le même pouvoir de calcul que nos ordinateurs (pourtant situés dans un espace de dimension 3).

Ces résultats sont bien sûr importants pour la théorie de la calculabilité et montrent une fois de plus que le pouvoir de calcul discret maximal est atteint par des disposi-

tifs extrêmement simples. Non seulement les machines de Turing (des calculateurs discrets ne disposant que d'une mémoire finie et d'un ruban annexe de mémoire) ont ce pouvoir maximum de calcul, mais les signaux des mondes de J. Durand-Lose aussi.

Calculs infinitaires

Cela étant établi, la question initiale devient : l'exploitation des points d'accumulation donne-t-elle plus de puissance de calcul aux mondes des signaux ? Ou encore : existe-t-il des calculs (que nous qualifierons d'infinitaires) que l'on réussit à effectuer avec des signaux et des points d'accumulation et qui sont impossibles à une machine de Turing ou à un ordinateur au sens habituel, c'est-à-dire fini et composé d'éléments discrets ?

Alan Turing a démontré en 1936 que le problème de l'arrêt est algorithmiquement indécidable : il n'existe pas d'algorithme (pour un ordinateur habituel discret) ayant pour