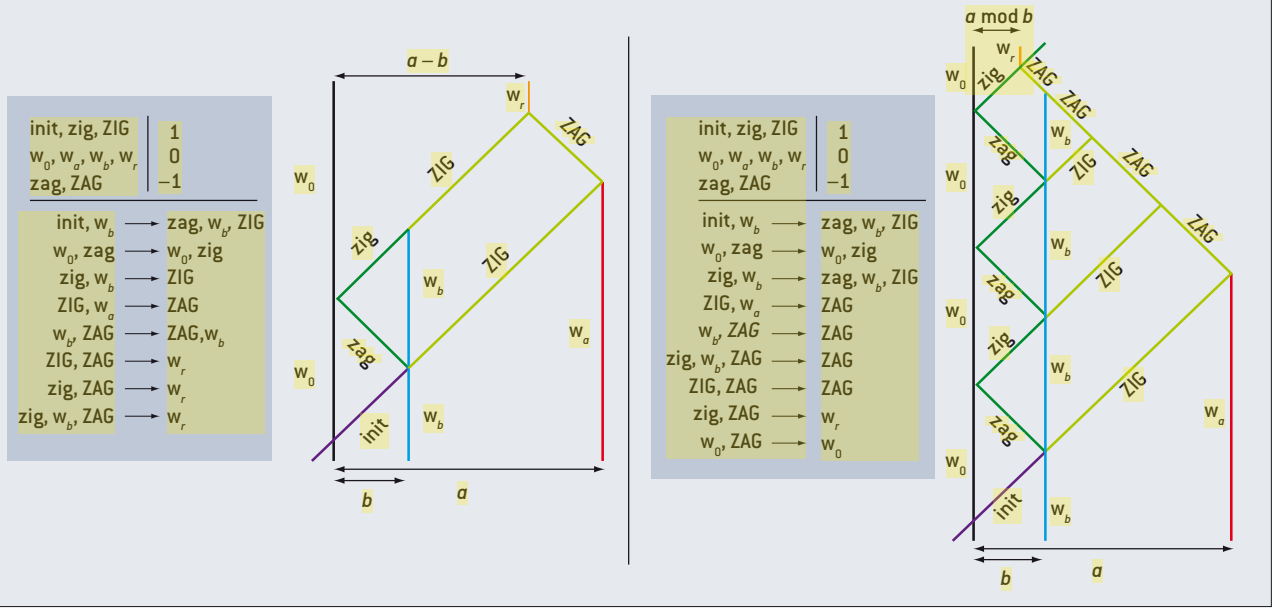
2. Effectuer une soustraction et un calcul modulaire

Pour réaliser des calculs avec des signaux, on place à l'instant 0 des signaux en des positions représentant les nombres sur lesquels on veut opérer. Ici *(figure de gauche)*, pour faire la soustraction $a - b$, on place un signal en position a et un autre en position b. Le système décrit dans la figure réalise en quelques collisions de signaux le calcul de la soustraction. Le résultat est inscrit dans l'univers unidimensionnel en considérant la distance qui sépare les deux signaux qui restent à l'issue des interactions. L'algorithme géométrique de soustraction fonctionne avec des nombres réels quelconques, même s'ils sont irrationnels comme π ou $\sqrt{5}$, et produit le résultat sans la moindre erreur.

La figure de droite montre l'algorithme géométrique de calcul du reste de la division de a par b (calcul de a modulo b).



fait du mouvement brownien et plus généralement du fait que, pour un physicien, aucune constante ou valeur physique n'est vraiment assimilable à un nombre réel avec son infinité de décimales : les physiciens utilisent les nombres réels, mais ils n'y croient pas vraiment !

La figure de droite de l'encadré 2 montre le déroulement du calcul de « 11 mod 3 » (le reste de la division euclidienne de 11 par 3). En poursuivant l'étude de ces calculs avec signaux, on découvre progressivement que tout ce qu'un programme d'ordinateur (discret) calcule, une configuration convenable de signaux le fait aussi. Puisqu'il existe des méthodes permettant d'énumérer les nombres premiers, il existe une façon de définir des signaux calculant les nombres premiers, par exemple en créant des particules immobiles placées progressivement en position 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc. On dit du modèle de calcul par signaux qu'il est « computationnellement universel ».

Bien que tout se déroule dans un univers à une seule dimension, et que les seuls objets de ce monde soient des signaux, tout calcul réalisable par un ordinateur habituel (qui calcule avec des entiers et effectue des opérations entre quantités discrètes), peut-être mené. Pour effectuer les calculs, on n'a d'ailleurs jamais besoin d'exploiter les points d'accumulation. Il suffit de ne considérer que des signaux ayant des nombres entiers pour vitesse, placés à l'instant initial en des positions à coordonnées entières et interagissant à des instants qui seront des nombres entiers. Le monde des signaux réduit à la droite des nombres entiers et fonctionnant en temps discret possède le même pouvoir de calcul que nos ordinateurs (pourtant situés dans un espace de dimension 3).

Ces résultats sont bien sûr importants pour la théorie de la calculabilité et montrent une fois de plus que le pouvoir de calcul discret maximal est atteint par des dispositifs extrêmement simples. Non seulement les machines de Turing (des calculateurs discrets ne disposant que d'une mémoire finie et d'un ruban annexe de mémoire) ont ce pouvoir maximum de calcul, mais les signaux des mondes de J. Durand-Lose aussi.

Calculs infinitaires

Cela étant établi, la question initiale devient : l'exploitation des points d'accumulation donne-t-elle plus de puissance de calcul aux mondes des signaux ? Ou encore : existe-t-il des calculs (que nous qualifierons d'infinitaires) que l'on réussit à effectuer avec des signaux et des points d'accumulation et qui sont impossibles à une machine de Turing ou à un ordinateur au sens habituel, c'est-à-dire fini et composé d'éléments discrets ?

Alan Turing a démontré en 1936 que le problème de l'arrêt est algorithmiquement indécidable : il n'existe pas d'algorithme (pour un ordinateur habituel discret) ayant pour