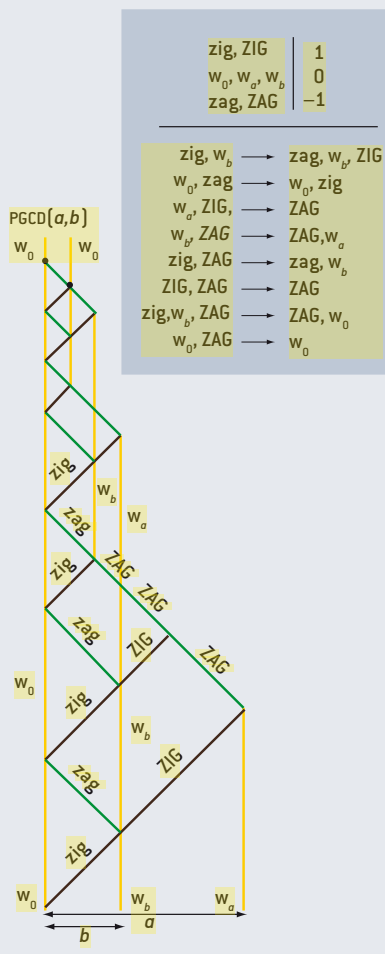


3. Calculer le PGCD

Le principe de l'algorithme géométrique de calcul du plus grand commun diviseur (PGCD), qui est une variante de l'algorithme d'Euclide, est le suivant. On part des deux nombres auxquels on s'intéresse, par exemple 8 et 3. On soustrait 3 à 8 autant de fois que c'est possible : $8 - 3 = 5$, $5 - 3 = 2$; puis on soustrait 2 à 3 autant de fois que c'est possible : $3 - 2 = 1$; puis on soustrait 1 à 2 autant de fois que c'est possible : $2 - 1 = 1$, $1 - 1 = 0$. Le dernier résultat non nul obtenu est le PGCD. Dans ce cas, c'est le nombre 1, ce qui signifie que 8 et 3 sont premiers entre eux.

Si, au lieu de deux nombres dont le rapport est rationnel, on place au départ deux nombres dont le rapport est irrationnel, l'algorithme géométrique de calcul du PGCD crée un point d'accumulation. C'est la façon la plus économique d'en créer un.



données un programme P et indiquant sans jamais se tromper si P va s'arrêter ou tourner indéfiniment. Une multitude d'autres problèmes sont algorithmiquement indécidables. La solution du dixième problème de Hilbert, obtenue en 1970 par Yuri Matiassevitch, donne un exemple de problème algorithmiquement indécidable plus naturel que l'arrêt d'un programme. Savoir si une équation polynomiale à coefficients entiers (par exemple $x^2 + 5y^2 = 129$) possède des solutions en nombres entiers (pour notre exemple, la réponse est oui car $x = 2$, $y = 5$ convient) est un problème algorithmiquement indécidable.

La question énoncée à propos des calculs infinitaires se reformule en : l'arrêt des programmes classiques est-il décidable dans le monde des signaux ? Peut-on trouver des algorithmes pour signaux qui résolvent le problème des équations polynomiales ?

Rendre décidable ce qui ne l'est pas ?

La réponse à toutes ces questions est OUI ! L'utilisation des points d'accumulations, permise par le monde de signaux, rend décidable ce qui ne l'est pas dans les mondes discrets. Bien sûr, le sens de tels résultats doit être analysé avec prudence. Certes, si on pouvait créer avec une parfaite précision des systèmes de signaux (soit avec des particules, soit avec d'autres éléments physiques) et que ces signaux calculaient sans commettre la moindre erreur, on disposerait d'outils dont le pouvoir dépasserait tout ce que les ordinateurs classiques réalisent : certaines indécidabilités seraient levées.

Cependant, cela ne semble guère envisageable. D'une part, la précision de toute mesure est limitée dans notre espace physique. D'autre part, il est impossible de mettre en place des configurations initiales parfaites de signaux (sans la moindre approximation pour les positions et les vitesses), perfection nécessaire pour mener des calculs avec points d'accumulation. Les résultats obtenus concernant les calculs avec points d'accumulation n'ont donc qu'un intérêt théorique.

Notons toutefois que plusieurs études, menées en particulier par Istvan Németi et Gergely Székely, de l'Institut mathématique de l'Académie hongroise des sciences, proposent des modèles physiques de calcul où des sortes de points d'accumulation sont physiquement réalisés et utilisés. Ces modèles exploitent soit des trous noirs véritables, soit des courbes fermées de l'espace-temps relativiste. Le concept d'espace-temps de Malament-Hogarth a même été introduit pour désigner ces situations où un point de l'espace-temps possède un passé causal infini et peut donc recevoir une information sur le déroulement d'un calcul infini passé, comme c'est le cas pour les points d'accumulation des mondes de signaux. Si nous pouvions contrôler ou fabriquer des trous noirs ou des courbes fermées de l'espace-temps, nous lèverions les limitations imposées par les ordinateurs discrets.

Indiquons encore un autre type de résultats obtenu par les chercheurs explorant le monde des signaux. Tout nombre réel algébrique (par exemple $\sqrt{2}$) et de nombreuses constantes mathématiques usuelles (π , e , $\log 2$, etc.) sont calculables dans le monde des signaux par des dispositifs où, initialement, toutes les particules ont des positions et des vitesses rationnelles (c'est-à-dire exprimables comme rapport de deux entiers). Dans le monde des signaux, grâce aux points d'accumulation, on peut connaître parfaitement des nombres qui ne sont pas rationnels, et une fois qu'on les connaît, on peut bien sûr calculer avec eux.

L'étude des nombres qu'on peut connaître avec les calculs de signaux a conduit en 2009 à leur caractérisation. Sont accessibles dans le monde des signaux tous les nombres réels pouvant s'écrire comme une différence de deux nombres récursivement énumérables (qui sont les nombres obtenus comme limite croissante d'une suite de nombres rationnels calculable par algorithme).

Le nombre π est récursivement énumérable, donc calculable dans un monde de signaux où toutes les données initiales sont des nombres rationnels (grâce, par exemple, à la série $\pi = 4/1 - 4/3 + 4/5 - 4/7 + 4/9 - \dots$). Certains nombres réels ne sont pas calculables par signaux. En effet, les nombres