

égaux à une différence de deux nombres récursivement énumérables forment un ensemble infini dénombrable, alors que les nombres réels constituent un ensemble infini non dénombrable (donc plus « grand »). On réalise de magnifiques et surprenants calculs dans le monde des signaux, mais certaines limitations persistent.

Remarquons que le nombre Ω de Chaitin, dont la connaissance donnerait la solution de la majorité des grands problèmes mathématiques, telle la conjecture de Goldbach, est un nombre récursivement énumérable, donc calculable par signaux rationnels.

Calculs plus rapides

À côté du problème de ce qui est faisable en principe par le calcul (décidabilité, indécidabilité, etc.) un autre problème préoccupe les théoriciens de l'informatique : quels sont les calculs réalisables rapidement et quels sont ceux qui, du fait même de leur nature, demandent un temps impossible à envisager en pratique, et qu'on nomme « intrinsèquement difficiles ».

Les problèmes NP-complets sont la plus importante catégorie de problèmes de calcul considérés comme intrinsèquement difficiles. Par exemple, déterminer si un graphe est coloriable avec trois couleurs, sans que deux nœuds reliés soient de la même couleur, est un problème NP-complet.

On n'a pas démontré que les résoudre en temps polynomial était impossible, mais cela semble très probable et en attendant qu'on réussisse à le prouver (c'est la grande conjecture de l'informatique théorique, notée $P \neq NP$), on admet que les problèmes NP-complets sont intrinsèquement difficiles.

Est-ce qu'un calcul avec des signaux peut résoudre rapidement un problème NP-complet ? La réponse est oui. Denys Duchier, J. Durand-Lose et Maxime Senot ont réussi, sans utiliser de points d'accumulation (cela aurait été trop facile), à concevoir un algorithme géométrique pour signaux qui résout en temps constant et espace constant un problème NP-complet. Comme les problèmes NP-complets sont tous d'une difficulté équivalente, ce sont en fait tous les problèmes NP-complets que

le modèle des signaux permet de résoudre efficacement.

L'encadré 3 représente le calcul du PGCD de deux nombres, effectué géométriquement avec seulement trois types de signaux. Cette figure est l'élément clef pour la solution du problème du nombre de signaux minimum nécessaire aux calculs.

Notons d'abord qu'avec 15 types de signaux différents n'utilisant que quatre vitesses différentes, on peut calculer tout ce qui est calculable par machine usuelle discrète. On n'a donc pas besoin en général d'un très grand nombre de vitesses différentes pour travailler. La question se pose cependant de savoir combien de signaux sont nécessaires pour mener des calculs. Ce problème a récemment été traité. Voici ce qu'on a trouvé et démontré.

– Avec des signaux n'utilisant qu'une vitesse, ou deux vitesses, il est impossible d'obtenir des points d'accumulation.

– Avec quatre vitesses différentes bien choisies, des points d'accumulation sont calculables, et on réussira même à calculer tout ce qui est calculable avec les machines habituelles discrètes.

– Avec trois vitesses différentes, aucun point d'accumulation ne peut être obtenu par calcul de signaux si les rapports entre vitesses ou entre distances initiales de signaux sont tous des nombres rationnels.

– En revanche, avec trois vitesses différentes, il existe des situations où un point d'accumulation est construit en exploitant l'irrationalité du rapport de deux des vitesses, et des situations où un point d'accumulation est construit en exploitant l'irrationalité de deux des distances initiales entre signaux de départ.

– En 2013, J. Durand-Lose a montré que tout calcul classique était faisable avec une machine à 25 types de signaux n'utilisant que trois vitesses différentes.

On le voit, cette compréhension fine du monde idéalisé des signaux, outre l'intérêt mathématique pour l'informatique théorique, nous prépare pour le futur... quand nous saurons créer des points d'accumulation dans notre espace-temps, si les physiciens nous confirment que c'est possible. Merveilles du rêve mathématique ! ■

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

J. Durand-Lose, *Irrationality is needed to compute with signal machines with only three speeds*, dans *The Nature of Computation*, Springer [LNCS 7921], pp. 108-119, 2013.

H. Andréka *et al.*, *Closed timelike curves in relativistic computation*, *Parallel Processing Letters*, vol. 22(3), 1240010, 2012.

D. Duchier *et al.*, *Computing in the fractal cloud : Modular generic solvers for SAT and Q-SAT variants*, dans *Theory and Applications of Models of Computation*, Springer [LNCS 7287], pp. 435-447, 2012.

B. S. Cooper *et al.* (ed.), *How the World Computes*, Turing Centenary Conf. and 8th Conf. on Computability in Europe, CiE 2012, Cambridge, UK, June 18-23, Proceedings, 2012.

J. Durand-Lose, *Abstract geometrical computation 1 : Embedding black hole computations with rational numbers*, *Fund. Inf.*, vol. 74(4), pp. 491-510, 2006.

I. Nemeti et G. David, *Relativistic computers and the Turing barrier*, *Appl. Math. Comput.*, vol. 178(1), pp. 118-142, 2006.