

égaux à une différence de deux nombres récursivement énumérables forment un ensemble infini dénombrable, alors que les nombres réels constituent un ensemble infini non dénombrable (donc plus « grand »). On réalise de magnifiques et surprenants calculs dans le monde des signaux, mais certaines limitations persistent.

Remarquons que le nombre Ω de Chaitin, dont la connaissance donnerait la solution de la majorité des grands problèmes mathématiques, telle la conjecture de Goldbach, est un nombre récursivement énumérable, donc calculable par signaux rationnels.

Calculs plus rapides

À côté du problème de ce qui est faisable en principe par le calcul (décidabilité, indécidabilité, etc.) un autre problème préoccupe les théoriciens de l'informatique : quels sont les calculs réalisables rapidement et quels sont ceux qui, du fait même de leur nature, demandent un temps impossible à envisager en pratique, et qu'on nomme « intrinsèquement difficiles ».

Les problèmes NP-complets sont la plus importante catégorie de problèmes de calcul considérés comme intrinsèquement difficiles. Par exemple, déterminer si un graphe est coloriable avec trois couleurs, sans que deux nœuds reliés soient de la même couleur, est un problème NP-complet.

On n'a pas démontré que les résoudre en temps polynomial était impossible, mais cela semble très probable et en attendant qu'on réussisse à le prouver (c'est la grande conjecture de l'informatique théorique, notée $P \neq NP$), on admet que les problèmes NP-complets sont intrinsèquement difficiles.

Est-ce qu'un calcul avec des signaux peut résoudre rapidement un problème NP-complet ? La réponse est oui. Denys Duchier, J. Durand-Lose et Maxime Senot ont réussi, sans utiliser de points d'accumulation (cela aurait été trop facile), à concevoir un algorithme géométrique pour signaux qui résout en temps constant et espace constant un problème NP-complet. Comme les problèmes NP-complets sont tous d'une difficulté équivalente, ce sont en fait tous les problèmes NP-complets que

le modèle des signaux permet de résoudre efficacement.

L'encadré 3 représente le calcul du PGCD de deux nombres, effectué géométriquement avec seulement trois types de signaux. Cette figure est l'élément clef pour la solution du problème du nombre de signaux minimum nécessaire aux calculs.

Notons d'abord qu'avec 15 types de signaux différents n'utilisant que quatre vitesses différentes, on peut calculer tout ce qui est calculable par machine usuelle discrète. On n'a donc pas besoin en général d'un très grand nombre de vitesses différentes pour travailler. La question se pose cependant de savoir combien de signaux sont nécessaires pour mener des calculs. Ce problème a récemment été traité. Voici ce qu'on a trouvé et démontré.

– Avec des signaux n'utilisant qu'une vitesse, ou deux vitesses, il est impossible d'obtenir des points d'accumulation.

– Avec quatre vitesses différentes bien choisies, des points d'accumulation sont calculables, et on réussira même à calculer tout ce qui est calculable avec les machines habituelles discrètes.

– Avec trois vitesses différentes, aucun point d'accumulation ne peut être obtenu par calcul de signaux si les rapports entre vitesses ou entre distances initiales de signaux sont tous des nombres rationnels.

– En revanche, avec trois vitesses différentes, il existe des situations où un point d'accumulation est construit en exploitant l'irrationalité du rapport de deux des vitesses, et des situations où un point d'accumulation est construit en exploitant l'irrationalité de deux des distances initiales entre signaux de départ.

– En 2013, J. Durand-Lose a montré que tout calcul classique était faisable avec une machine à 25 types de signaux n'utilisant que trois vitesses différentes.

On le voit, cette compréhension fine du monde idéalisé des signaux, outre l'intérêt mathématique pour l'informatique théorique, nous prépare pour le futur... quand nous saurons créer des points d'accumulation dans notre espace-temps, si les physiciens nous confirment que c'est possible. Merveilles du rêve mathématique !

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

J. Durand-Lose, Irrationality is needed to compute with signal machines with only three speeds, dans *The Nature of Computation*, Springer [LNCS 7921], pp. 108-119, 2013.

H. Andréka et al., Closed timelike curves in relativistic computation, *Parallel Processing Letters*, vol. 22(3), 1240010, 2012.

D. Duchier et al., Computing in the fractal cloud : Modular generic solvers for SAT and Q-SAT variants, dans *Theory and Applications of Models of Computation*, Springer [LNCS 7287], pp. 435-447, 2012.

B. S. Cooper et al. (ed.), *How the World Computes*, Turing Centenary Conf. and 8th Conf. on Computability in Europe, CiE 2012, Cambridge, UK, June 18-23, Proceedings, 2012.

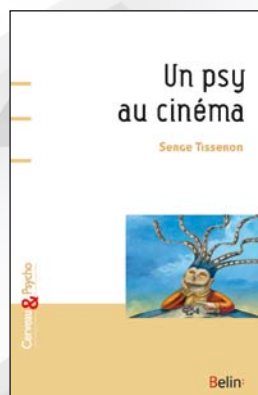
J. Durand-Lose, Abstract geometrical computation 1 : Embedding black hole computations with rational numbers, *Fund. Inf.*, vol. 74(4), pp. 491-510, 2006.

I. Nemeti et G. David, Relativistic computers and the Turing barrier, *Appl. Math. Comput.*, vol. 178(1), pp. 118-142, 2006.

Un psy au cinéma

Serge Tisseron

Réf. 84245127



Le cinéma fascine. Il surprend, il amuse, il nous permet de nous évader, il émeut. Chacun a son avis sur les films qu'il voit. Mais si le cinéma nous parlait d'abord de nous ? De ce que nous sommes, de nos peurs avouées ou non, de nos bassesses et de nos grandeurs ? Il s'agirait moins alors de le comprendre que de nous comprendre à travers lui,

individuellement, mais aussi collectivement.

Éditions Belin 2013

280 pages – 25 euros – ISBN 978-2-84245-127-1

Le cerveau mélomane

Emmanuel Bigand (dir.)

Réf. 84245118



La musique touche tout un chacun et suscite de multiples émotions. Elle ne laisse personne indifférent. Ce que l'on sait moins, c'est la puissance de la musique. Puissance sur les capacités cognitives et intellectuelles de ceux qui en écoutent souvent ou qui la pratiquent ; mais aussi puissance

thérapeutique chez certains sujets.

Éditions Belin 2013

200 pages – 21 euros – ISBN 978-2-84245-118-9

Les sens trompés

Des anomalies du cerveau aux comportements étranges

Patrick Verstichel

Réf. 84245111



Cet ouvrage est un recueil des articles que le neurologue Patrick Verstichel a publiés dans le magazine *Cerveau & Psycho*. L'auteur, médecin clinicien, nous propose des « enquêtes médicales » sur des cas cliniques parfois difficiles à élucider !

Éditions Belin-Pour la Science 2013

160 pages – 25 euros
ISBN 978-2-8424-5111-0

Maux d'artistes

Ce que cachent les œuvres

Sebastian Dieguez

Réf. 84245101



Existe-t-il des liens cachés entre une œuvre d'art – une peinture, une sculpture, une composition musicale ou une œuvre littéraire – et une maladie de l'esprit que présentait son auteur ? Examinant divers chefs-d'œuvre avec un regard de neuropsychologue, Sebastian Dieguez analyse plus d'une vingtaine d'œuvres de

Dostoïevski, Monet, De Chirico, Proust, Van Gogh, etc.

Éditions Belin / Pour la Science 2010

176 pages – 25,40 euros – ISBN 978-2-8424-5101-1