

Des coïncidences pas si étranges

David Hand

Quand deux tirages successifs du loto donnent les mêmes numéros gagnants, faut-il être surpris ? En fait, de telles coïncidences, qui nous paraissent très improbables, se produisent souvent – et cela en conformité avec la théorie des probabilités.

D'après tout un ensemble de lois mathématiques, que je surnomme collectivement « principe d'improbabilité », les coïncidences ne devraient pas nous surprendre. En fait, nous devrions nous attendre à observer des coïncidences. L'un des aspects clés de ce principe est la loi des « vraiment grands » nombres. D'après cette loi, étant donné un nombre suffisant d'occasions, on doit s'attendre à ce qu'un événement donné se produise, même s'il est très improbable à chaque occasion.

Parfois, cependant, alors que les occasions sont vraiment très nombreuses, on peut avoir l'impression qu'elles sont relativement rares. Cette erreur de perception nous conduit à sous-estimer considérablement la probabilité d'un événement : nous pensons qu'une situation est incroyablement improbable, alors qu'en fait elle est très probable, voire presque inévitable.

Comment peut-il exister un nombre énorme d'occasions sans que l'on en ait conscience ? La loi des combinaisons, un volet apparenté au principe d'improbabilité, indique comment. Elle montre que le nombre de combinaisons d'éléments en interaction augmente très rapidement avec le nombre d'éléments.

Le « problème des anniversaires » en est un exemple bien connu. On se pose la question suivante : combien de personnes au minimum un groupe doit-il contenir pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux que deux personnes de ce groupe, qui qu'elles soient, aient leur anniversaire le même jour ? La réponse est : seulement 23. Si le groupe compte 23 personnes ou plus, alors il y a davantage de chances que deux d'entre elles aient le même jour anniversaire plutôt qu'il n'y ait aucun duo de ce type dans le groupe.

La combinatoire des anniversaires

À ce stade, si vous n'avez jamais entendu parler de ce « paradoxe » des anniversaires, vous serez peut-être étonné. Le nombre 23 vous semble sans doute beaucoup trop petit. Vous avez peut-être tenu le raisonnement suivant : il n'y a qu'une chance sur 365 qu'une autre personne donnée ait la même date d'anniversaire que moi. Il y a donc 364 chances sur 365 qu'une personne donnée ait une date d'anniversaire différente de la mienne.

Si je suis dans un groupe de n personnes, chacune des $n - 1$ autres personnes

ayant une probabilité égale à $364/365$ d'avoir une date anniversaire différente de la mienne, alors la probabilité que toutes ces $n - 1$ personnes aient une date anniversaire différente de la mienne est égale à $364/365 \times 364/365 \times 364/365 \times 364/365 \times \dots \times 364/365$, c'est-à-dire $364/365$ multiplié $n - 1$ fois par lui-même. Si n est égal à 23, ce produit donne 0,94.

Puisque 0,94 est la probabilité qu'aucune de ces personnes n'ait la même date anniversaire que moi, la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait la même date anniversaire que moi vaut seulement $1 - 0,94$ (en effet, puisque soit quelqu'un a la même date anniversaire que moi, soit personne n'a la même date anniversaire que moi, la somme des probabilités de ces deux événements est nécessairement égale à 1). Or $1 - 0,94$ est égal à 0,06, nombre qui est très petit.

Mais ce n'est pas le bon calcul à faire. Cette probabilité (la probabilité que quelqu'un ait la même date d'anniversaire que moi) ne répond pas à la question posée. En effet, il s'agit plutôt de savoir si deux personnes quelconques de l'assemblée ont la même date anniversaire. Cela inclut la probabilité que quelqu'un d'autre ait la même date d'anniversaire que moi – c'est

L'ESSENTIEL

- Dans un groupe de 23 personnes, il y a plus d'une chance sur deux que deux d'entre elles aient le même jour anniversaire.
- En 2009, le loto bulgare a tiré, à quatre jours d'intervalle, les mêmes six numéros gagnants.
- De tels événements, que nous considérons comme très improbables, se produisent sans cesse autour de nous. La loi des très grands nombres et la combinatoire aident à comprendre pourquoi.

© Colin Anderson/Alamy Images/Corbis



ce qu'on a calculé plus haut –, mais cela inclut également la probabilité que deux (ou plus) des autres personnes partagent une même date anniversaire, différente de la mienne.

C'est là que la combinatoire entre en jeu. Tandis qu'il n'y a que $n - 1$ personnes du groupe susceptibles de partager ma date d'anniversaire, le nombre de paires formées de deux personnes différentes et prises dans un groupe de n personnes est égal à $n(n-1)/2$. Ce nombre de paires croît rapidement quand n augmente. Quand n est égal à 23, on arrive à 253, ce qui est plus de dix fois supérieur à $n - 1 = 22$. En d'autres termes, si l'assemblée compte 23 personnes, il y a 253 paires possibles de personnes, dont seulement 22 m'incluent.

Considérons alors la probabilité qu'il n'existe aucune paire, prise parmi ces 23 personnes, dont les deux membres aient le même jour anniversaire. Pour deux personnes, la probabilité que la seconde personne n'ait pas la même date d'anniversaire que la première est de $364/365$. Ensuite, la probabilité que ces deux personnes-là aient des jours anniversaires différents et qu'une troisième personne ne partage son anniversaire ni avec l'une ni avec l'autre

est égale à $364/365 \times 363/365$. De la même façon, la probabilité que ces trois-là aient des dates d'anniversaire différentes et qu'une quatrième personne ne partage son anniversaire avec aucune des trois premières est égale à $364/365 \times 363/365 \times 362/365$. En continuant ainsi, on obtient que la probabilité qu'aucune des 23 personnes n'ait la même date d'anniversaire qu'une autre est égale à $364/365 \times 363/365 \times 362/365 \times 361/365 \times \dots \times 343/365$.

Ce produit vaut 0,49. Parce que la probabilité qu'aucune des 23 personnes ne partage la même date anniversaire vaut 0,49, la probabilité que certaines d'entre elles aient le même jour anniversaire est égale à $1 - 0,49$, soit 0,51 : ce nombre est supérieur à $1/2$.

Des loteries qui se répètent

Un autre exemple d'événement improbable en apparence mais qui ne l'est en fait pas du tout est fourni par les loteries. Le 6 septembre 2009, le loto bulgare a tiré au hasard les numéros gagnants 4, 15, 23, 24, 35 et 42. Ces numéros ne sont pas insolites. Certes, les chiffres qui les composent (1, 2, 3, 4 et 5) sont tous petits, mais cela

LA CHUTE D'UN PIANO SUR UNE VOITURE est très improbable. Mais les déménagements de piano et les voitures sont très nombreux...

n'a rien d'extraordinaire. Par ailleurs, la combinaison gagnante comporte une paire de nombres consécutifs, 23 et 24, mais cela arrive plus souvent qu'on ne le croit (si l'on demande à des gens de choisir au hasard six nombres compris entre 1 et 49, ils choisiront moins souvent des paires de nombres consécutifs qu'il n'y en aurait dans un tirage purement aléatoire).

Ce qui est insolite, c'est ce qui s'est produit quatre jours plus tard : le 10 septembre, la loterie bulgare a tiré les numéros gagnants 4, 15, 23, 24, 35, 42 – exactement les mêmes nombres que la semaine précédente. L'événement a provoqué à l'époque une tempête médiatique. « C'est la première fois que cela arrive depuis 52 ans que le loto existe. Nous sommes absolument abasourdis d'assister à une telle coïncidence, mais cela s'est produit », déclarait une porte-parole le 18 septembre dans une dépêche de l'agence de presse *Reuters*. Le ministre des sports bulgare de l'époque, Svilen Neikov, ordonna une enquête. Une fraude massive aurait-elle