

Permutations, combinaisons et arrangements

Trois objets distincts A, B et C peuvent être ordonnés de six façons différentes : ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Chacune de ces façons est une *permutation* de l'ensemble {A, B, C}. Plus généralement, pour n objets distincts, il existe $n!$ permutations, où $n!$ (prononcé « factorielle n ») désigne le produit $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$.

Dans un ensemble {A, B, C} de trois objets distincts, on a trois

façons de choisir deux des objets : on peut choisir {A, B}, {B, C} ou {A, C}. Chacun de ces trois sous-ensembles est une *combinaison* de deux objets choisis parmi trois. Plus généralement, étant donné un ensemble de n objets distincts, il existe $C(n, p) = n! / [p! (n-p)!]$ combinaisons de p objets parmi les n . Autrement dit, il existe $n! / [p! (n-p)!]$ façons de choisir p objets parmi n . Dans les combinaisons, on ne tient pas

compte de l'ordre dans lequel sont placés les objets. S'il faut tenir compte de l'ordre, on parle d'*arrangements*. On a ainsi six arrangements différents de deux objets pris parmi trois : AB, BA, BC, CB, AC, CA. Plus généralement, le nombre d'arrangements de p objets pris parmi n est $A(n, p) = n! / (n-p)!$ (c'est le nombre de combinaisons multiplié par $p!$, le nombre de permutations de p objets).

été commise ? Les numéros précédents auraient-ils pu être copiés d'une quelconque manière ?

En fait, cette coïncidence assez stupéfiante était simplement un autre exemple du principe d'improbabilité. Premièrement, de nombreuses loteries sont organisées de par le monde. Deuxièmement, elles ont lieu de manière très répétée, depuis des années. Cela s'additionne pour donner un très grand nombre de tirages, où les numéros tirés vont pouvoir éventuellement se répéter. Et troisièmement, la combinatoire intervient : chaque fois qu'il y a un tirage, on peut obtenir les mêmes numéros qui ont été produits dans l'un quelconque des tirages précédents. De façon générale, comme on l'a vu avec les anniversaires, si l'on effectue n tirages du loto, on a $n(n-1)/2$ paires de tirages, chacune de ces paires étant susceptible de produire une combinaison gagnante identique.

Le loto bulgare qui a produit des combinaisons identiques en 2009 est un loto où l'on tire six numéros sur 49. Or il existe $49! / [6! (49-6)!] = (49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44) / (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2) = 13\,983\,816$ ensembles différents de six numéros choisis parmi 49 (il s'agit de combinaisons, où l'on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel sont tirés les numéros) (voir l'encadré ci-dessus). La probabilité de tirer une combinaison donnée de six numéros est donc égale à $1/13\,983\,816$. Cela signifie que la probabilité que deux tirages donnés produisent la même combinaison vaut $1/13\,983\,816$.

Mais quelle est la probabilité que deux tirages quelconques parmi trois donnent la même combinaison ? Ou quelle est la probabilité que deux tirages quelconques parmi 50 produisent la même combinaison ?

■ L'AUTEUR



David HAND est professeur émérite de mathématiques et directeur de recherche

à l'Imperial College de Londres. Il est ancien président de la Société royale de statistiques.

Article adapté de l'ouvrage de D. Hand, *The Improbability Principle : Why Coincidences, Miracles, and Rare Events Happen Every Day*, Scientific American/Farrar, Straus and Giroux, 2014.

■ BIBLIOGRAPHIE

F. Sauvageot, *Coïncidences, Images des mathématiques*, CNRS, 2011 (<http://images.math.cnrs.fr/Coïncidences.html>).

D. J. Hand, *Statistics : A Very Short Introduction*, Oxford University Press, 2008.

I. Stewart, *Quelle coïncidence !*, Pour la Science n° 249, pp. 106-107, 1998.

J. Bérard, *Introduction aux probabilités et à la statistique*, <http://math.univ-lyon1.fr/~jberard/cours-www.pdf>

Dans le cas de trois tirages, notés par exemple A, B et C, il existe trois paires possibles de tirages ((A, B), (B, C) et (A, C)). Mais avec 50 tirages, on a 1 225 paires possibles. Et avec 1 000 tirages, il y a 499 500 paires possibles. La combinatoire entre en jeu. Quand on fait passer le nombre de tirages de 50 à 1 000, ce qui correspond à une multiplication par un facteur 20, l'impact sur le nombre de paires est beaucoup plus grand : en passant de 1 225 à 499 500, il est multiplié par près de 408. On entre dans le domaine des nombres vraiment grands.

Avec des milliers de tirages, la coïncidence ne doit plus étonner

Combien de tirages faudrait-il pour que la probabilité de tirer deux fois les six mêmes numéros soit supérieure à $1/2$, c'est-à-dire pour que cet événement ait davantage de chances de se produire que de ne pas se produire ? En utilisant la même méthode que pour le problème des anniversaires, on obtient comme réponse 4 404.

À raison de deux tirages par semaine, on en a 104 par an. Il faudra alors moins de 43 ans pour atteindre 4 404 tirages. En d'autres termes, au bout de 43 ans, il y a davantage de chances qu'il y ait deux combinaisons gagnantes du loto identiques que le contraire. Cela jette un éclairage assez différent sur le commentaire de la porte-parole bulgare selon laquelle il s'agissait d'une coïncidence bizarre !

Et cela n'est pas valable que pour une loterie déterminée. Quand on prend en compte toutes les loteries dans le monde, on comprend qu'il serait surprenant que les tirages ne se répètent pas de temps en temps. Vous ne serez donc pas étonnés d'apprendre que pour la loterie nationale israélienne, les numéros tirés le 16 octobre 2010 (13, 14, 26, 32, 33, 36) étaient exactement les mêmes que ceux tirés quelques semaines plus tôt, le 21 septembre. Vous ne serez pas étonnés, contrairement aux dizaines de personnes qui ont envahi les programmes radiophoniques d'Israël pour se plaindre que le loto était truqué.

Le résultat du loto bulgare était inhabituel du fait que les combinaisons gagnantes identiques ont été obtenues par deux tirages consécutifs. Mais en raison de la loi des vraiment grands nombres, combi-

née à l'existence de nombreuses loteries régulières, on ne devrait pas être trop surpris. La loterie *Cash 5* de la Caroline du Nord, aux États-Unis, a ainsi produit les mêmes numéros gagnants les 9 et 11 juillet 2007.

Un autre exemple de coïncidence (plutôt frustrante) est ce qui est arrivé à Maureen Wilcox en 1980, aux États-Unis. Cette personne avait acheté des billets comportant les numéros gagnants à la fois pour la loterie de l'État du Massachusetts et pour celle de Rhode Island. Malheureusement pour elle, son billet de la loterie du Massachusetts avait les numéros gagnants de la loterie de Rhode Island, et *vice-versa*.

Si vous achetez un billet pour chacune de dix loteries, vous avez dix chances de gagner. Mais avec dix billets, on a 45 paires différentes de billets. Par conséquent, la probabilité que l'un des dix billets corresponde à l'un des dix tirages de loterie est plus de quatre fois supérieure à votre probabilité de gagner. Ce n'est pas une recette pour faire fortune : vous ne gagnez rien en ayant sur

votre billet d'une certaine loterie la combinaison gagnante d'une autre loterie – à part le sentiment que l'Univers se joue de vous.

La loi des combinaisons s'applique quand un grand nombre d'éléments (personnes, objets, etc.) interagissent. Considérons par exemple une classe de 30 étudiants. Ces personnes peuvent interagir de nombreuses façons. Les étudiants peuvent

LA PROCHAINE FOIS QUE VOUS FAITES l'expérience d'une coïncidence qui vous semble étrange, rappelez-vous le principe d'improbabilité !

travailler tout seuls : ils sont 30. Ils peuvent travailler en binômes ; il existe 435 binômes différents possibles. Ils peuvent travailler en trinômes ; il existe 4 060 triplets possibles. Et ainsi de suite, jusqu'à ce que tous travaillent ensemble, et là bien sûr il n'y a plus qu'un ensemble de 30 étudiants travaillant ensemble.

Au total, le nombre de groupes possibles différents d'étudiants que l'on peut former

(groupes de un étudiant, groupes de deux étudiants, groupes de trois étudiants, etc.) est 1 073 741 823. On dépasse le million, et tout cela avec seulement 30 étudiants. De façon générale, si un ensemble contient n éléments, on a $2^n - 1$ sous-ensembles possibles. Si $n=100$, le résultat est $2^{100} - 1$, ce qui est égal à environ 10^{30} , un nombre indéniablement grand.

Au cas où 10^{30} ne serait toujours pas assez grand pour vous, considérez le Web, qui a environ 2,5 milliards d'utilisateurs. Chacun de ces internautes peut interagir avec tous les autres. Cela donne 3×10^{18} paires possibles et, au total, $10^{750\,000\,000}$ groupes possibles d'internautes en interaction. Même des événements de très faible probabilité deviennent pratiquement certains si vous leur donnez autant d'occasions de se produire.

La prochaine fois que vous faites l'expérience d'une coïncidence qui semble étrange, rappelez-vous le principe d'improbabilité ! ■

france culture

LA MARCHÉ DES SCIENCES

Découvertes, inventions, aventures savantes au fil de l'Histoire

Aurélié Luneau
14h-15h / chaque jeudi

franceculture.fr

SCIENCE