

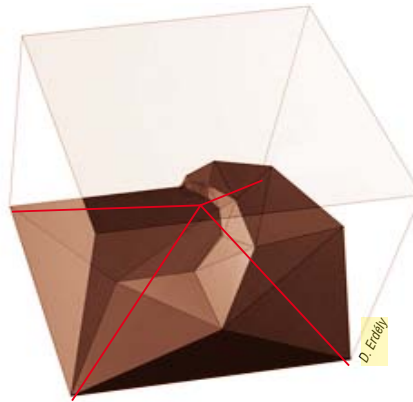
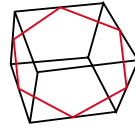
— La somme des aires des triangles qui suivent un triangle équilatéral (supposé d'aire unité) est donc $2/3 + 2/9 + 2/27 + 2/81 + \dots$, quivaut 1. En effet, si l'on note s cette somme infinie, elle vérifie $s - s/3 = 2/3$ (tous les termes se simplifient, sauf le premier), ce qui donne $2s/3 = 2/3$, donc $s = 1$.

Un miraculeux pliage en accordéon infini

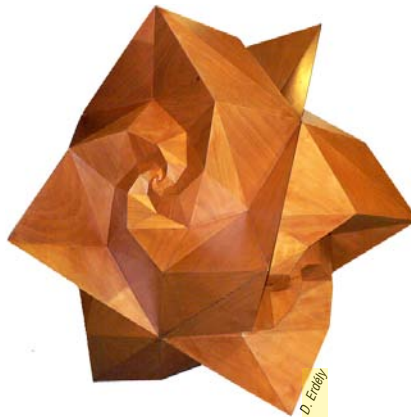
Cette remarque sur les aires est amusante, mais la propriété la plus étonnante du Spidron est qu'il est pliable. En effet, si l'on pave le plan avec des exemplaires du double crochet en carton léger dont on s'est arrangé pour qu'il se plie suivant les dessins des triangles, alors le pavage du plan se contracte continuellement en une forme régulièrement bosselée. Chaque triangle pivote et s'écarte du plan de départ, tout en restant attaché à ses voisins. Cette contraction, semblable à celle d'un accordéon infini, est mathématiquement parfaite : les triangles restent plats et solidaires, sans aucune déchirure ou torsion. Ce mouvement continu de contraction s'étend à toute la surface, ce qui bien sûr rapproche les centres des hexagones, un peu comme dans le mouvement inverse de celui de l'expansion de l'Univers chère aux physiciens (voir l'encadré, e et f, et l'animation www.youtube.com/watch?v=rvCB09xChGA&NR=1).

En 1979, D. Erdély présenta sa découverte à Ernő Rubik, son professeur d'art appliqué, célèbre inventeur du cube de Rubik et d'une multitude d'autres fascinants casse-tête. D. Erdély fit la démonstration de sa surface contractile avec un pliage en carton. E. Rubik, émerveillé par cette forme dont il n'avait jamais rien vu d'équivalent, l'encouragea à en poursuivre l'étude et à en étudier les variantes et les applications.

Informé de l'existence de ce pavage pliable, le mathématicien Lajos Szilassi, à l'Université de Szeged, en Hongrie, fut pris d'un doute : est-il vrai que, lors du mouvement de contraction, les triangles du découpage restent plats et solidaires ? En supposant que chaque triangle est attaché à ses voisins rigide-ment par une charnière, est-il possible à l'ensemble des éléments du pavage de



2. UN CUBE SE DÉCOUPE en deux parties ayant un hexagone comme surface de contact (les sommets de l'hexagone sont sur le milieu de six arêtes du cube). Ce découpage en suggère un autre, en six parties pyramidales où le contact est une surface bosselée composée d'un Spidron.



3. L'OCTASPIDRON : cette sculpture de polyèdre spidronisé, conçue par Dániel Erdély et Walt van Ballegooijen, a été réalisée par l'ébéniste Istvan Sagi. D. Erdély indique : « L'Octaspiron est fait de huit morceaux séparés. Quatre sont identiques et les quatre autres en sont les symétriques. C'est la première forme remplissant l'espace que j'ai trouvée. »

pivoter de façon coordonnée en produisant la contraction en accordéon observée avec les modèles en carton souple ?

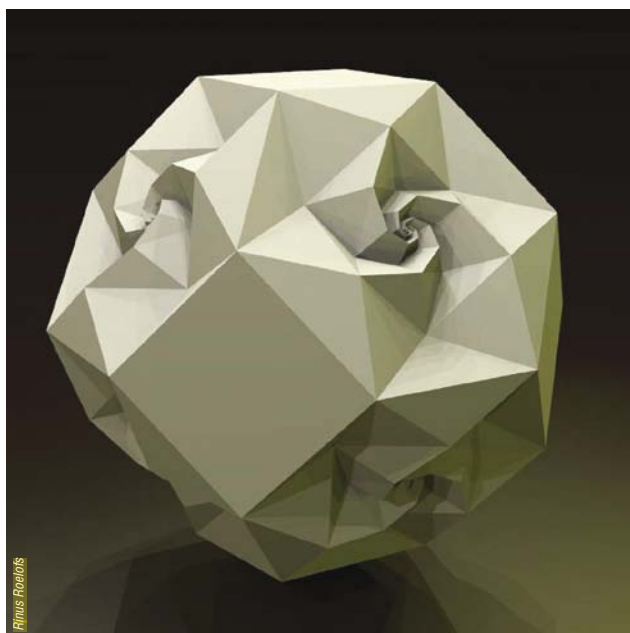
D. Erdély, qui n'est pas mathématicien, ne pouvait résoudre ce délicat problème de géométrie. L. Szilassi s'y attela. Posant le problème en termes rigoureux et s'aidant du logiciel de calcul formel *Maple*, il réussit à mener un raisonnement et des calculs établissant que le mouvement de la surface en contraction est continu et n'entraîne ni déchirure, ni torsion de ses éléments triangulaires. Le pliage miraculeux de l'artiste D. Erdély est bien la découverte mathématique d'une structure dynamique, pliable, infinie... et jusque-là ignorée !

Certes, la trouvaille est le fruit du hasard, sans que le découvreur ne produise la démonstration de la propriété principale du pavage des triangles. Mais il s'agit bien d'un type totalement inattendu de mouvement coordonné d'une structure géométrique doublement infinie : chaque centre de spirale est la limite d'une infinité de triangles, et les spirales se répètent indéfiniment pour recouvrir le plan mathématique.

Art, mathématiques, applications...

Cette aventure montre une fois encore que l'univers mathématique, malgré son apparente difficulté, est ouvert à tous et que même des amateurs peuvent y dénicher de petites merveilles que les professionnels ne voient pas ! L'article de Lajos Szilassi donnant le détail de sa preuve n'a été publié qu'en 2004, plus de 20 ans après la découverte expérimentale du pliage en accordéon du plan.

L'étude du double crochet et des hexagones contractiles a donné lieu à de nombreux travaux que nous allons présenter et qui se poursuivent. En 2009, un brevet d'antenne utilisant le demi-Spidron a été déposé par le Coréen Keum-Cheol. D. Erdély a évoqué d'autres applications possibles : plusieurs épaisseurs de surfaces pliables à base d'hexagones feraient d'intéressants amortisseurs de chocs ou donneraient de jolies zones de déformation dans les carrosseries automobiles. Les structures remplis-



4. DEUX POLYÈDRES ARCHIMÉDIENS SPIDRONISÉS, l'octaèdre tronqué (à gauche) et le polyèdre formé de huit faces semblables (à droite). Ces polyèdres peuvent s'assembler pour remplir l'espace;

on distingue bien les parties rentrantes et les parties saillantes, qui permettent à un second exemplaire symétrique de s'ajuster dans le premier (voir aussi <http://edan.szhaz.org/SpidroNew/polyhedra.htm>).

sant l'espace (voir la figure 4) suggèrent des jouets de construction ou, pourquoi pas, des meubles. La surface pliable en accordéon rend possible des murs acoustiques réglables, des bâtiments pliants ou même des éléments de stations spatiales.

Cherchant à approfondir et à généraliser son invention, D. Erdély s'est associé à d'autres mathématiciens ou artistes. Avec Walt Ballegooijen de Hollande, Paul Gailiunas d'Angleterre et bien d'autres, l'étude du double crochet et de ses variantes se poursuit. Elle produit des constructions géométriques nouvelles aussi bien que de belles œuvres d'art exposées dans le monde entier.

Des variantes du Spidron obtenues en modifiant les deux triangles de base de la figure découverte par D. Erdély autorisent d'autres pavages du plan (n'ayant plus nécessairement la propriété de se contracter comme le pavage par le Spidron original), ou donnent naissance à des formes tridimensionnelles remarquables composées uniquement de deux triangles utilisés à diverses échelles et formant des crochets logarithmiques.

Ces formes conduisent par exemple à définir de nouvelles dissections des polyèdres platoniciens. On sait qu'il est possible de couper un cube en deux parties identiques ayant une face hexagonale : c'est la dissection hexagonale du cube. En exploitant cette construction et les surfaces bosselées de l'hexagone contractile, on a proposé de nouveaux découpages du cube en deux ou six parties identiques ou énantiomorphes (voir la figure 2). Les autres polyèdres platoniciens ont aussi été découpés grâce aux Spidrons. Un petit film réalisé par le groupe de recherche sur les Spidrons et fondé sur le cube de Yoshimoto (www.youtube.com/watch?v=xupWsbC4zhg) montre une chorégraphie de polyèdres utilisant ce découpage.

Polygones et polyèdres spidronisés

Dans le cadre de l'étude des généralisations de l'hexagone pliable, les chercheurs ont défini la notion de « polygone spidronisé » : il s'agit d'une forme dans l'espace composée de deux triangles isocèles disposés en couronnes (chacune composée

d'une suite de triangles) reproduite en taille décroissante, selon la même idée que l'hexagone de base de D. Erdély, qu'on peut regarder comme une couronne de 12 triangles reproduite à des échelles de plus en plus petites. Ces couronnes emboîtées composent des surfaces bosselées, assemblages de spirales logarithmiques ayant un centre commun. Les polygones convexes ayant quatre côtés ou plus peuvent tous être « spidronisés ». Cela conduit à une méthode pour remplacer les faces des 13 polyèdres archimédiens par des polygones « spidronisés », ce qui donne des versions spidronisées de ces polyèdres (voir les figures 1, 3 et 4, et <http://spidron.hu/archispidron/>).

On sait qu'il existe des polyèdres flexibles, c'est-à-dire pouvant changer de forme sans se défaire et sans que leurs faces soient déformées. Le premier polyèdre flexible fut proposé par mathématicien canadien Robert Connelly en 1977. Une version simplifiée en a été donnée par Klaus Steffen. Le plan couvert de Spidrons est une sorte de polyèdre flexible de taille infinie ! D'après un théorème attribué à Cauchy