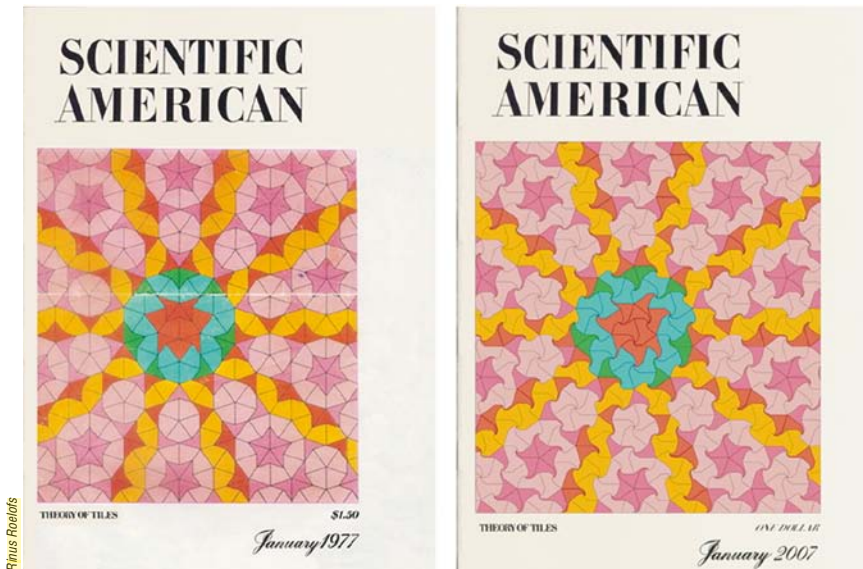




5. EN MODIFIANT LES DEUX PAVÉS APÉRIODIQUES DE PENROSE, les artistes du groupe de recherche sur les Spidrons ont créé deux tuiles avec des crochets de demi-Spidron qui pavent le plan de manière apériodique. Sur ce modèle, une fausse couverture de *Scientific American* a été réalisée (à droite) en hommage à la couverture historique de janvier 1977, qui représentait le pavage apériodique de Penrose (à gauche).



6. UN PAVAGE SPIDRONISÉ DU PLAN HYPERBOLIQUE. Le plan hyperbolique (modèle plan de géométrie hyperbolique, où la somme des angles d'un triangle est inférieure à 180°) est-il pavable avec des formes spidronisées ? Craig Kaplan a montré que oui.

(malgré la preuve incorrecte qu'il en donna, corrigée depuis), il n'existe aucun polyèdre flexible convexe. Le « théorème du soufflet » démontré en 1997 par R. Connelly, Idzhad Sabitov et Anke Waltz, indique que les polyèdres flexibles ont un volume qui reste constant quand on les déforme.

On raconte que l'idée de ce surprenant théorème serait venue du mathématicien américain Dennis Sullivan, qui s'amusa à souffler de la fumée de cigarette dans le modèle de polyèdre flexible de la salle de thé de l'Institut des hautes études scientifiques (IHÉS) à Bures sur Yvette, et qui aurait constaté que celle-ci restait dans le polyèdre même quand on le déformait.

C'est dans ce théorème du soufflet que se trouve sans doute l'explication qu'aucun polyèdre spidronisé construit jusqu'ici n'est flexible. Puisque ces polyèdres sont composés de Spidrons généralisés et que le plan est flexible quand il est spidronisé, on s'attendait à ce que certains polyèdres spidronisés soient flexibles. Cependant, cette éventuelle flexibilité d'un polyèdre spidronisé ne semble pouvoir s'obtenir que par une contraction ou une expansion du polyèdre (car c'est ce qui se produit pour le plan), laquelle entraînerait un changement de son volume et contredirait donc le théorème du soufflet : les polyèdres spidronisés ne seront sans doute jamais flexibles.

Pavages de l'espace

Toujours à propos des polyèdres, les recherches du groupe réuni par D. Erdély ont mis au jour une série de nouveaux polyèdres, dont de nombreux polyèdres ou systèmes de polyèdres pavant l'espace.

Les polyèdres pavant l'espace constituent une famille de polyèdres aussi intéressante que mal connue. Le cube est le seul des cinq polyèdres platoniciens qui pave l'espace. Cependant, une combinaison de tétraèdres et d'octaèdres (deux autres polyèdres platoniciens) pave l'espace.

Il n'existe que cinq polyèdres convexes ayant des faces régulières (c'est-à-dire dont les faces sont des polygones réguliers) pavant l'espace. Ce sont le cube, le prisme triangulaire, le prisme hexagonal, le dodé-

caèdre rhombique, l'octaèdre tronqué, et le gyrobiprisme triangulaire (deux prismes triangulaires collés l'un à l'autre par leur face carrée en s'arrangeant pour que les triangles n'aient pas de côtés communs).

En supprimant l'exigence que les faces soient des polygones réguliers, on obtient une famille infinie de polyèdres pavant l'espace. En supprimant l'exigence de convexité, la famille s'agrandit encore. Si, de plus, on accepte d'utiliser plusieurs polyèdres pour un seul pavage de l'espace, les systèmes de pavages deviennent si nombreux qu'aucun classement complet n'en a été produit, et d'ailleurs on en découvre régulièrement de nouveaux.

Une classification partielle des pavages de l'espace par des polyèdres a été proposée par Michael Goldberg en 1980, et une liste de 42 systèmes de polyèdres pavant l'espace a été détaillée par Peter Pearce dans son livre *Structure in Nature is a Strategy for Design* (1978). Cette liste a été utilisée par le groupe de recherche sur les Spidrons et a servi à concevoir d'autres systèmes de polyèdres pavant l'espace, composés de polyèdres spidronisés.

En 2009, Walt van Ballegooijen, Paul Gaiiunas et D. Erdély ont ainsi construit 42 nouveaux systèmes de polyèdres spidronisés ayant tous la propriété de remplir parfaitement l'espace. Dans ce travail, il a fallu être très attentif au sens de rotation des spirales utilisées, car, pour que deux faces de polyèdres spidronisés s'emboîtent parfaitement, il faut qu'elles soient basées sur des spirales tournant dans des sens opposés (sur http://spidron.hu/spidronised_spacefillers/main.html, une magnifique présentation de ce travail est visible, comportant plusieurs petits films).

Pavages apériodiques

Les membres du groupe se sont aussi intéressés au classique problème des pavages apériodiques du plan. On recherche un jeu de formes planes (chacune est disponible en quantité illimitée) pouvant paver le plan sans trou, ni chevauchement, et ne pouvant le faire que de manière non périodique (aucune translation ne doit laisser inva-

riant le pavage). La présente rubrique de novembre 2013 donnait quelques exemples de ces jeux de formes, et présentait en particulier le pavage apériodique n'utilisant qu'une seule tuile décorée, récemment découvert par Joan Taylor.

Ici, le jeu a consisté à trouver des tuiles apériodiques qui soient chacune construites avec un crochet de type Spidron. Le défi semblait délicat. Il a pourtant été relevé et un jeu de deux tuiles spidronisées apériodiques a été trouvé. Ces tuiles sont construites sur le modèle des deux tuiles de Roger Penrose dénommées la « flèche » et le « cerf-volant ». Les chercheurs se sont amusés à reprendre la couverture du *Scientific American* de 1977 qui présentait un pavage de Penrose avec des flèches et des cerfs-volants, et ils l'ont transformé en un pavage avec leurs tuiles spidronisées (voir la figure 5).

Spidrons sur le plan hyperbolique

Paver le plan jusqu'à l'infini est intéressant, mais il existe une représentation géométrique plus concrète de l'infini, celle du plan hyperbolique modélisé dans un disque. On imagine que plus on s'éloigne du centre d'un disque, plus il devient difficile d'avancer, au point qu'il est impossible d'atteindre la frontière du disque, laquelle joue le rôle d'un horizon, à distance finie. Cette géométrie particulière, où par un point passent plusieurs parallèles à une droite donnée, oblige à revoir les pavages usuels du plan, qui ne conviennent plus. Se pose alors la question de savoir si ce plan hyperbolique est pavable par des formes spidronisées. La réponse positive a été donnée par Craig Kaplan (voir la figure 6 et <http://www.cgl.uwaterloo.ca/ffcsk/projects/spidron/>).

Les magnifiques formes construites à partir de Spidrons sont le résultat du travail d'artistes s'occupant de design et de mathématiciens qui se fondent sur une tradition millénaire. Leur dialogue permet à chaque groupe de bénéficier du savoir-faire et des visions de l'autre. Il doit se poursuivre. ■

■ L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE
est professeur
émérite
à l'Université
de Lille
et chercheur
au Laboratoire d'informatique
fondamentale de Lille (LIFL).

Le blog de Jean-Paul Delahaye
sur Scilogs.fr:
www.scilogs.fr/complexites/

■ BIBLIOGRAPHIE

The New Spidron, 2014:
<http://www.spidron.hu/>

Spidron System, 2014:
<http://edan.szhaz.org/SpidronNew/index.html>

W. van Ballegooijen et al.,
Spidronised space-fillers,
Bridges 2009 Proceedings.

D. Erdély et M. Pelletier, Spidron
domain expanding Spidron
universe, Bridges 2006
Proceedings, pp. 549-550.

D. Erdély, Some surprising new
properties of Spidrons,
Bridges 2005 Proceedings,
pp. 179-186.

Groupe de recherche
autour du Spidron :
Dániel Erdély, Gergo Kiss,
Peter Koszegi, Emil Molnar,
Laszlo Beke, Lajos Szilassi,
Rinus Roelofs,
Cristiana Grigorescu,
Paul Gaiiunas, Miklos Laczkovich,
Walt van Ballegooijen,
Amina Buhler-Allen, Janos Erdos,
Marc Pelletier.



Retrouvez la rubrique
Logique & calcul sur
www.pourlascience.fr