

HISTOIRE DES SCIENCES

Guldin et les indivisibles de Cavalieri

La préhistoire du calcul intégral, au XVII^e siècle, a été marquée par la querelle sur les « indivisibles » de l'italien Bonaventura Cavalieri. Les raisons profondes de la controverse ne relevaient pas uniquement des mathématiques.

Amir ALEXANDER

Le calcul intégral est une partie des mathématiques qui, dans sa forme la plus simple et dans son principe, consiste à déterminer la longueur, l'aire ou le volume d'un objet en le découpant en petits morceaux que l'on additionne, et en procédant à des découpages de plus en plus fins. Un débat entre deux savants du XVII^e siècle a contribué à ses origines.

En 1635, le mathématicien italien Bonaventura Cavalieri avança l'idée que tout plan est composé d'une infinité de droites parallèles, et que tout volume est constitué d'une infinité de plans parallèles. Cette décomposition par la pensée d'une surface en lignes ou d'un volume en plans est au fondement de la « méthode des indivisibles » de Cavalieri. Selon cette méthode, deux figures planes (par exemple) ont la même aire si leurs indivisibles (les lignes parallèles qui les composent) ont les mêmes longueurs.

La méthode des indivisibles peut être considérée comme un ancêtre du calcul intégral. Mais les indivisibles de Cavalieri ont d'abord dû survivre aux attaques du mathématicien suisse Paul Guldin. Bien que le différend ait porté sur une question mathématique, on peut y déceler la trace de divergences plus profondes, liées au fait que Guldin et Cavalieri appartenaient à des ordres catholiques différents. Comme on va le voir ici, ces deux mathématiciens, le premier étant un jésuite et le second un jésuite, avaient une conception différente de l'utilisation des mathématiques pour comprendre la nature de la réalité.

Guldin critique les indivisibles de Cavalieri dans le livre IV de son *De Centro Gravitationis* (également intitulé *Centrobaryca*), paru en 1641. Tout d'abord, argumente Guldin, les preuves de Cavalieri ne sont pas des preuves constructives, telles que les mathématiciens classiques les aiment.

Dans l'approche euclidienne classique, les figures géométriques sont construites pas à pas, en partant du simple au plus complexe, à la règle et au compas. Chaque étape d'une preuve doit faire intervenir une telle construction, suivie d'une déduction des implications logiques pour la figure résultante.

Or Cavalieri procède à l'envers : il part de figures géométriques toutes faites telles que des paraboles, des spirales, etc., qu'il

divise en un nombre infini de parties. Une telle procédure pourrait être qualifiée de déconstruction plutôt que de construction : son but n'est pas de construire une figure géométrique nouvelle, mais de déchiffrer la structure interne d'une figure existante.

Guldin s'attaque ensuite aux fondements de la méthode de Cavalieri : l'idée qu'un plan soit composé d'une infinité de lignes, ou un solide d'une infinité de plans. Pour Guldin, c'est absurde : « Aucun géomètre n'acceptera jamais que la surface soit, et puisse être appelée en langage géométrique "toutes les lignes d'une telle figure". »

Lignes sans épaisseur

En d'autres termes, puisque les lignes n'ont pas d'épaisseur, on pourra en placer côte à côte autant qu'on voudra, on ne parviendra jamais à couvrir le plus petit morceau de plan qui soit. L'idée de Cavalieri de calculer l'aire d'une figure plane à partir de la dimension de « toutes ses lignes » est donc absurde.

Cela amène Guldin à son argument final. La méthode de Cavalieri repose sur l'établissement d'un rapport entre toutes les lignes d'une figure et toutes les lignes d'une autre. Or, souligne Guldin, les deux ensembles de lignes sont infinis, et le rapport d'une infinité sur une autre infinité n'a pas de sens. Vous aurez beau multiplier autant de fois que vous le voulez un nombre infini d'indivisibles, il ne dépassera jamais un autre ensemble infini d'indivisibles.

Prise globalement, la critique de la méthode de Cavalieri par Guldin incarnait les



1. BONAVENTURA CAVALIERI (1598-1647), statue datant de 1844, réalisée par Giovanni Antonio Labus et située dans la cour du palais de Brera, à Milan.

principes fondamentaux des mathématiques jésuites. Christophorus Clavius (1538-1612), le fondateur de la tradition mathématique jésuite, et ses héritiers au sein de l'ordre pensaient que les mathématiques devaient procéder de façon systématique et déductive, en partant de postulats simples et en allant vers des théorèmes de complexité croissante, pour décrire les relations universelles entre les figures. Les preuves constructives étaient précisément la traduction de cet idéal.

Cette approche produisait une logique mathématique rigoureuse et hiérarchique qui, pour les Jésuites, était la principale raison justifiant les études dans ce domaine : elle démontrait qu'en procédant par déduction systématique, des principes abstraits construisent un monde fixe et rationnel dont les vérités sont universelles et incontestables. En cela, fit remarquer Clavius, la géométrie euclidienne était plus qu'aucune autre science proche de l'idéal jésuite de certitude, de hiérarchie et d'ordre. Il s'ensuit que l'insistance de Guldin à réclamer des preuves constructives n'était pas affaire de pédantisme ou d'étroitesse d'esprit, comme le pensaient Cavalieri et ses partisans, mais une expression des convictions profondes de son ordre religieux.

Il en va de même de la critique de Guldin portant sur la division des plans et des solides en « toutes les lignes » et « tous les plans ». Les mathématiques doivent être non seulement hiérarchiques et constructives, mais aussi parfaitement rationnelles et dépourvues de contradictions. Or Guldin jugeait les indivisibles de Cavalieri incohérents dans leur principe même, la notion qu'un continuum soit composé d'indivisibles étant selon lui contraire à la raison. « Des choses qui n'existent pas, et ne pourraient exister, ne peuvent être comparées », s'insurge-t-il, « et il n'est donc pas étonnant qu'elles conduisent à des paradoxes et à la contradiction, et finalement, à l'erreur. »

Pour les Jésuites, ces mathématiques étaient bien pires que pas de mathématiques du tout. Le but des mathématiques, après tout, était d'apporter ordre et stabilité au monde, alors que la méthode des indivisibles n'apportait que confusion et chaos. Si ce système défectueux était admis, les mathématiques ne pourraient plus être le



2. PAUL GULDIN (1577-1643), portrait anonyme datant de 1650 [Département de mathématiques de l'Université de Graz, en Autriche], et le frontispice de son ouvrage *De Centro Gravitationis* où, notamment, il critique l'idée des indivisibles de Cavalieri.

fondement d'un ordre rationnel éternel. Le rêve jésuite, celui d'une stricte hiérarchie universelle aussi incontestable que les vérités de la géométrie, serait condamné.

La théologie en filigrane

Dans ses écrits, Guldin n'expliquait pas les raisons philosophiques profondes de son rejet des indivisibles, pas plus que ne le firent les mathématiciens jésuites Mario Bettini et Andrea Tacquet, qui dénonçaient eux aussi la méthode de Cavalieri. En tant que mathématiciens, ces trois hommes devaient attaquer les indivisibles sur des bases mathématiques, et non philosophiques ou religieuses. Leur crédibilité mathématique ne pourrait que souffrir s'ils affirmaient être motivés par des considérations théologiques ou philosophiques.

Les participants au débat sur les indivisibles connaissaient bien évidemment les véritables enjeux, comme le mathématicien jésuite Stefano degli Angeli y fit allusion en écrivant qu'il ne savait pas « quel esprit »

animait les mathématiciens jésuites. À de très rares exceptions près, le débat resta mathématique.

Quand Cavalieri fut confronté pour la première fois aux critiques de Guldin, en 1642, il se mit immédiatement au travail pour produire une réfutation détaillée. Il avait initialement prévu de répondre sous la forme d'un dialogue entre amis, un genre prisé par son mentor Galilée. Mais quand il montra l'ébauche à Gianantonio Rocca, un mathématicien ami, ce dernier l'en dissuada. Il était plus sûr, le mit en garde Rocca, de ne pas recourir au format désobligeant du dialogue, avec ses traits d'esprit et ses réparties condescendantes, susceptible de mettre en rage des opposants puissants. Mieux valait, conseilla Rocca, écrire une réponse directe aux accusations de Guldin, en se concentrant sur les questions strictement mathématiques et en s'abstenant de toute provocation « galiléenne ».

Ce que Rocca passa sous silence, c'est que, contrairement à Galilée, Cavalieri n'a jamais manifesté de génie littéraire dans ses écrits, ni de don pour présenter des