

principes fondamentaux des mathématiques jésuites. Christophorus Clavius (1538-1612), le fondateur de la tradition mathématique jésuite, et ses héritiers au sein de l'ordre pensaient que les mathématiques devaient procéder de façon systématique et déductive, en partant de postulats simples et en allant vers des théorèmes de complexité croissante, pour décrire les relations universelles entre les figures. Les preuves constructives étaient précisément la traduction de cet idéal.

Cette approche produisait une logique mathématique rigoureuse et hiérarchique qui, pour les Jésuites, était la principale raison justifiant les études dans ce domaine : elle démontrait qu'en procédant par déduction systématique, des principes abstraits construisent un monde fixe et rationnel dont les vérités sont universelles et incontestables. En cela, fit remarquer Clavius, la géométrie euclidienne était plus qu'aucune autre science proche de l'idéal jésuite de certitude, de hiérarchie et d'ordre. Il s'ensuit que l'insistance de Guldin à réclamer des preuves constructives n'était pas affaire de pédantisme ou d'étroitesse d'esprit, comme le pensaient Cavalieri et ses partisans, mais une expression des convictions profondes de son ordre religieux.

Il en va de même de la critique de Guldin portant sur la division des plans et des solides en « toutes les lignes » et « tous les plans ». Les mathématiques doivent être non seulement hiérarchiques et constructives, mais aussi parfaitement rationnelles et dépourvues de contradictions. Or Guldin jugeait les indivisibles de Cavalieri incohérents dans leur principe même, la notion qu'un continuum soit composé d'indivisibles étant selon lui contraire à la raison. « Des choses qui n'existent pas, et ne pourraient exister, ne peuvent être comparées », s'insurge-t-il, « et il n'est donc pas étonnant qu'elles conduisent à des paradoxes et à la contradiction, et finalement, à l'erreur. »

Pour les Jésuites, ces mathématiques étaient bien pires que pas de mathématiques du tout. Le but des mathématiques, après tout, était d'apporter ordre et stabilité au monde, alors que la méthode des indivisibles n'apportait que confusion et chaos. Si ce système défectueux était admis, les mathématiques ne pourraient plus être le



2. PAUL GULDIN (1577-1643), portrait anonyme datant de 1650 (Département de mathématiques de l'Université de Graz, en Autriche), et le frontispice de son ouvrage *De Centro Gravitationis* où, notamment, il critique l'idée des indivisibles de Cavalieri.

fondement d'un ordre rationnel éternel. Le rêve jésuite, celui d'une stricte hiérarchie universelle aussi incontestable que les vérités de la géométrie, serait condamné.

La théologie en filigrane

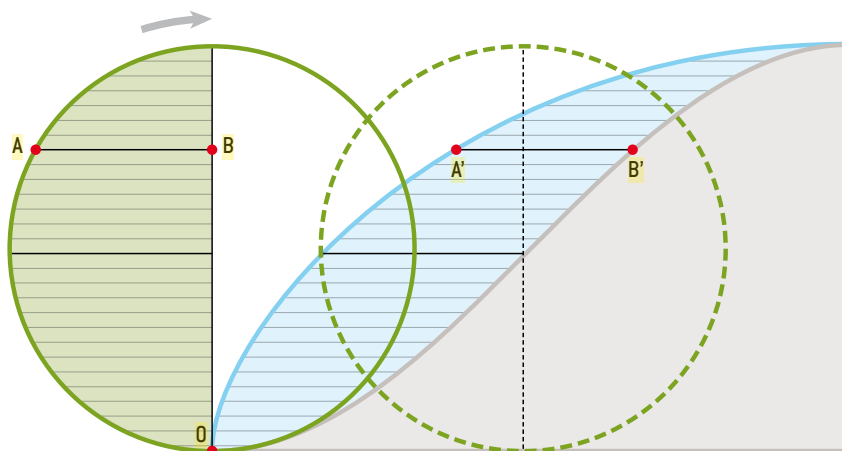
Dans ses écrits, Guldin n'expliquait pas les raisons philosophiques profondes de son rejet des indivisibles, pas plus que ne le firent les mathématiciens jésuites Mario Bettini et Andrea Tacquet, qui dénonçaient eux aussi la méthode de Cavalieri. En tant que mathématiciens, ces trois hommes devaient attaquer les indivisibles sur des bases mathématiques, et non philosophiques ou religieuses. Leur crédibilité mathématique ne pourrait que souffrir s'ils affirmaient être motivés par des considérations théologiques ou philosophiques.

Les participants au débat sur les indivisibles connaissaient bien évidemment les véritables enjeux, comme le mathématicien jésuite Stefano degli Angeli y fit allusion en écrivant qu'il ne savait pas « quel esprit »

animait les mathématiciens jésuites. À de très rares exceptions près, le débat resta mathématique.

Quand Cavalieri fut confronté pour la première fois aux critiques de Guldin, en 1642, il se mit immédiatement au travail pour produire une réfutation détaillée. Il avait initialement prévu de répondre sous la forme d'un dialogue entre amis, un genre prisé par son mentor Galilée. Mais quand il montra l'ébauche à Gianantonio Rocca, un mathématicien ami, ce dernier l'en dissuada. Il était plus sûr, le mit en garde Rocca, de ne pas recourir au format désobligeant du dialogue, avec ses traits d'esprit et ses réparties condescendantes, susceptible de mettre en rage des opposants puissants. Mieux valait, conseilla Rocca, écrire une réponse directe aux accusations de Guldin, en se concentrant sur les questions strictement mathématiques et en s'abstenant de toute provocation « galiléenne ».

Ce que Rocca passa sous silence, c'est que, contrairement à Galilée, Cavalieri n'a jamais manifesté de génie littéraire dans ses écrits, ni de don pour présenter des



3. LA MÉTHODE DES INDIVISIBLES DE CAVALIERI indique par exemple que l'aire du demi-cercle (en vert) est égale à l'aire de la surface bleue, leurs « indivisibles » (segments en noir) étant simplement décalés. Ce résultat constitue une étape pour montrer que l'aire (en bleu et gris) délimitée par un cycle de cycloïde (courbe en bleu) est égale à trois fois l'aire du cercle – la cycloïde étant la courbe décrite par un point O du cercle lorsque celui-ci roule sur une droite.

L'AUTEUR



Amir ALEXANDER est historien des mathématiques à l'Université de Californie à Los Angeles.

Article adapté de l'ouvrage de l'auteur, *Infinitesimal: How a Dangerous Mathematical Theory Shaped the Modern World*, Scientific American/Farrar, Straus and Giroux, 2014.

BIBLIOGRAPHIE

A. R. Alexander, *Exploration Mathematics: The rhetoric of discovery and the rise of infinitesimal methods*, *Configurations*, vol. 9(1), pp. 1-36, 2001.

D. Descotes, « Le vertige de l'infini », dans *Pascal, Les Génies de la Science*, n° 16, pp. 32-51, 2003.

K. Anderson, *Cavalieri's method of indivisibles*, *Archive for the History of Exact Sciences*, vol. 31(4), pp. 291-367, 1985.

pas moins de mauvaise foi. Quiconque a lu son ouvrage de 1635 *Geometria Indivisibilis... promota* ou ses *Exercitationes* ne doute pas un instant qu'ils reposent sur l'intuition fondamentale que le continuum est formé d'indivisibles. La défense du jésuite sur ce point est un peu faible.

La réponse de Cavalieri à l'argument de Guldin selon lequel « un infini n'est pas en proportion ou en rapport avec un autre infini » est à peine plus convaincante. Cavalieri distingue deux types d'infini, affirmant qu'« un infini absolu » n'est effectivement pas en proportion avec un autre « infini absolu », mais que toutes les lignes et tous les plans ont un « infini relatif » et non absolu. Ce type d'infini, affirme-t-il alors, peut être (et est) en proportion avec un autre infini relatif. Comme précédemment, Cavalieri semble défendre sa méthode sur des bases techniques abstruses, recevables ou non par les autres mathématiciens. Dans un cas comme dans l'autre, son argument est sans rapport avec la véritable motivation de la méthode des indivisibles.

Mathématiques constructives ou non ?

Cette motivation est finalement dévoilée dans la réponse de Cavalieri à l'accusation de Guldin de ne pas avoir correctement « construit » ses figures. Ici, la patience de Cavalieri arrive à bout, et il laisse apparaître le fond de sa pensée. Guldin a affirmé que toutes les figures, angles et lignes d'une preuve géométrique doivent être soigneusement construits à partir des principes premiers ; Cavalieri conteste cela catégoriquement. « Pour qu'une preuve soit vraie », écrit-il, « il n'est pas nécessaire de décrire effectivement ces figures analogues, mais il suffit de supposer qu'elles ont été décrites mentalement. »

Et c'est là que réside la véritable différence entre Guldin et Cavalieri, entre les Jésuites et les partisans des indivisibles. Pour les Jésuites, le but des mathématiques est de construire un monde qui soit un lieu fixe et éternel, où l'ordre et la hiérarchie ne puissent jamais être remis en cause. C'est pourquoi chaque élément du monde doit être soigneusement et rationnellement

problèmes complexes de façon spirituelle et divertissante. Cavalieri fit probablement bien de suivre les conseils de son ami et de nous épargner un « dialogue » dans la prose indigeste et absconse qui le caractérisait. Et c'est ainsi que la réponse de Cavalieri à Guldin constitua le troisième « Exercice » de son dernier livre sur les indivisibles, *Exercitationes Geometricae Sex*, publié en 1647 et intitulé, assez platement, *In Guldinum* (« Concernant Guldin »).

Dans sa réponse, Cavalieri ne semble pas particulièrement troublé par la critique de Guldin. Il nie supposer que le continuum soit constitué d'un nombre infini de parties indivisibles, argumentant que sa méthode ne dépend pas de cette hypothèse. Si l'on croit que le continuum est composé d'indivisibles, alors oui, « toutes les lignes » s'additionnent pour donner une surface et « tous les plans » un volume ; mais si l'on n'admet pas que les lignes forment une surface, alors il y a sûrement quelque chose, en plus des lignes, qui constitue la surface et quelque chose, en plus des plans, qui constitue le volume. Rien de cela, soutient Cavalieri, n'a de conséquence sur la méthode des indivisibles, qui compare toutes les lignes ou plans d'une figure avec celles ou ceux d'une autre figure, indépendamment du fait que oui ou non ces éléments composent effectivement la figure.

L'argument de Cavalieri est peut-être techniquement acceptable, mais il n'en est