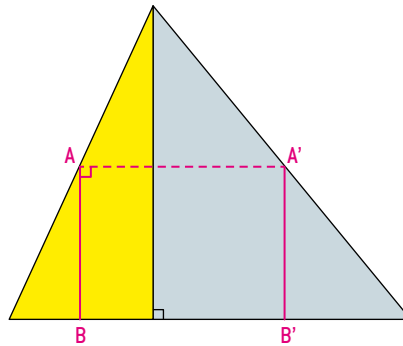


construit, et pourquoi le moindre soupçon de contradictions et de paradoxes ne peut être toléré. C'est une mathématique « descendante », dont le but est d'apporter rationalité et ordre à un monde autrement chaotique.

Pour Cavalieri et les autres indivisibilistes, c'est exactement le contraire : les mathématiques ont pour point de départ une intuition matérielle du monde, qui leur suggère que les figures planes sont constituées de lignes, et les volumes de plans, de la même façon qu'une toile est tissée à partir de fil et qu'un livre se compose d'un assemblage de pages. Il n'est pas nécessaire de construire ces figures par le raisonnement, parce que nous savons qu'elles existent déjà dans le monde. Il suffit d'en admettre l'existence et d'étudier leur structure interne. Si nous rencontrons des paradoxes et contradictions apparents, ils sont forcément superficiels, et



4. LA MÉTHODE DE CAVALIERI ne fonctionne pas toujours. Par exemple, l'aire du triangle jaune n'est pas égale à celle du triangle bleu, alors qu'à tout « indivisible » vertical AB du premier correspond un « indivisible » vertical A'B' de même longueur du second.

ne sont que le résultat des limites de notre compréhension. On peut soit les résoudre, soit les utiliser comme outil d'investigation. Mais ils ne devraient jamais nous empêcher d'explorer la structure interne des figures géométriques et les relations cachées entre les unes et les autres.

Pour les mathématiciens classiques tels que Guldin, la notion que l'on puisse fonder les mathématiques sur une intuition vague et paradoxale était absurde : « Qui sera le juge » de la vérité d'une construction géométrique, demande-t-il moqueusement à Cavalieri, « la main, l'œil ou l'intellect ? » Cavalieri trouvait qu'en insistant sur l'évitement des paradoxes, Guldin faisait montre d'un pédantisme vain. Selon Cavalieri, un tel ergotage risquait d'avoir de graves conséquences : si Guldin l'emportait, une méthode puissante serait perdue, et les mathématiques elles-mêmes seraient trahies. ■

Éditions du Comité des travaux historiques et scientifiques une collection complète d'instruments de travail pour la recherche en sciences humaines



**Savants et inventeurs
entre la gloire et l'oubli**
Sous la direction de Patrice Bret
et Gérard Pajonk

136 pages
21 x 27 cm
br.
23 €



**Construire la ville
Histoire urbaine de la
pierre à bâtir**
Sous la direction de Jacqueline Lorenz,
François Blary et Jean-Pierre Gély

294 pages
21 x 27 cm
ill., 1 br.
35 €

LOGIQUE & CALCUL

Équations résolubles ou non ?

Parfois, une équation semble impossible à résoudre. Cette impossibilité est-elle théorique et définitive, ou peut-on la contourner ? En cherchant à répondre à de telles questions, les mathématiciens ont, au fil des siècles, franchi des étapes capitales.

Jean-Paul DELAHAYE

Au lycée, on apprend à résoudre des équations et des systèmes d'équations. L'élève qui a compris les méthodes enseignées traitera une large catégorie de problèmes. Pour chacun d'eux, il mettra en œuvre une « recette » qui, s'il procède avec soin, le conduira à la solution.

Les logiciels de calcul formel, *Sage*, *Pari/GP*, *Mathematica*, *Maple*, etc., se substituent à l'élève et, à l'aide de fonctions qui se nomment par exemple *solve*, font des calculs symboliques et traitent des équations trop compliquées pour le cerveau humain. Utilisant toute la puissance de nos machines et le savoir-faire des mathématiciens et ingénieurs qui développent et perfectionnent les algorithmes, ces logiciels sont d'incomparables experts en calcul. Le logiciel *Maple*, par exemple, trouve instantanément les quatre solutions de l'équation $X^4 - 6X^2 + 6 = 0$: $\sqrt{3} + \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} + \sqrt{3}$, $\sqrt{3} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{3} - \sqrt{3}$.

Il écrit ainsi les résultats, et non pas de manière approchée en donnant quelques décimales [ce qu'il sait faire aussi]. Mieux, il trouve les six solutions de l'équation : $X^6 - 26X^5 + 250X^4 - 1160X^3 + 2749X^2 - 3134X + 1320 = 0$, qui sont 1, 2, 3, 4, 5, 11. Il n'a aucun mal non plus quand on utilise des nombres transcendants comme coefficients (qu'il ne remplace pas par des valeurs approchées, mais traite symboliquement). Pour l'équation : $X^4 - \pi X^3 - 6X^2 + 6\pi X^2 + 11X^2 - 11\pi X - 6X + 6 = 0$, en quelques fractions de seconde, il donne les solutions qui sont 1, 2, 3, π .

1. L'invention des nombres complexes

Jérôme Cardan a publié une méthode (sans doute due à son rival Tartaglia) pour résoudre les équations polynomiales de degré 3 à une inconnue.

Comme pour celles de degré 2, il propose des formules qui donnent les solutions en fonction des coefficients de l'équation, notés ici a , b , c et d , et du nombre complexe i .

Les formules générales pour le troisième degré sont analogues à celles qu'on apprend à l'école pour le second degré... mais sont beaucoup plus compliquées. Nous les indiquons ci-dessous en notation moderne et sans démonstration, juste pour le plaisir esthétique.

L'*Ars Magna* de Jérôme Cardan a été publié en 1545. Il est écrit en latin. Cet ouvrage contient les premières solutions générales d'équations polynomiales de degré 3.



$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad a \neq 0$$

$$x_1 = S + T - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T)$$

$$x_3 = -\frac{S+T}{2} - \frac{b}{3a} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S-T)$$

$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$Q = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$$

$$R = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$$

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscriptum est in ordine Decimus.



Habes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa vocant) nouis adinventionibus ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea vulgò tritis iam septuaginta existerint. Neque folium, ubi tres numeri alteri, aut duo unum, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres unum equales fuerint, nodum explicant. Hunc a se librum ideo fecisse edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmetice thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum expolito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto avidius amplectantur, ac minore fastidio perdiciant.

Se posent alors plusieurs questions. Ce que font ces logiciels est-il parfait ? Seront-ils améliorables jusqu'à résoudre toute équation ? Seront-ils confrontés à des difficultés insurmontables et si oui, connaît-on des équations définitivement insolubles ?

Les réponses à ces questions exigent une formulation plus précise, mais si nous faisons cet effort, alors ce que nous apprennent les mathématiques et la logique est extrêmement clair... et souvent inattendu. Au passage, nous constaterons que de nombreux progrès mathématiques proviennent de l'étude des équations insolubles, ou qui apparaissent telles. C'est en comprenant

la nature des insolubilités que de profondes avancées se produisent, dont l'histoire est loin d'être achevée. Ces avancées annoncent peut-être des mathématiques créées par les ordinateurs, que David Ruelle entrevoit (voir l'encadré 5).

On sait depuis l'Antiquité que certaines équations n'ont pas de solution, ou du moins n'en ont pas du genre qu'on aurait aimé. L'équation $X^2 - 2 = 0$, équivalente à $X^2 = 2$, provoqua une révolution mathématique. La résoudre, c'est trouver des nombres qui, multipliés par eux-mêmes, donnent 2.

Les mathématiciens grecs recherchaient et attendaient une solution sous la forme d'un

quotient de deux entiers. Au ^{ve} siècle avant notre ère, Hippias de Métaponte découvrit, du moins d'après ce qu'on croit savoir de l'histoire de cette période peu documentée, qu'on n'y arriverait jamais. Il n'existe pas de solution à cette équation de la forme $X = n/d$ avec n et d entiers. C'était très ennuyeux, car la diagonale d'un carré de côté 1 a pour longueur un nombre X qui vérifie l'équation, ce qui rend donc inconcevable de nier l'existence d'une solution à l'équation !

Prouver l'inexistence de n et d est simple et procède d'un raisonnement par l'absurde. Il utilise le fait que le carré d'un nombre impair l'est aussi, ce qui est évident car $(2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$, et des manipulations faciles. Supposons qu'il existe un couple d'entiers (n, d) tel que $(n/d)^2 = 2$, et montrons que cela conduit à une contradiction. On peut supposer que n est impair ou que d est impair (si n et d sont tous les deux pairs, on les divisera par 2 autant de fois que nécessaire). On tire de l'égalité supposée que $n^2 = 2d^2$, dont on déduit que n est pair (s'il était impair, n^2 le serait et ne pourrait pas être égal à $2d^2$, qui est pair). En posant $n = 2n'$, on obtient $4n'^2 = 2d^2$, donc $2n'^2 = d^2$. On en tire alors que d est pair (s'il était impair, d^2 le serait aussi et ne pourrait être égal à $2n'^2$). On a ainsi prouvé que n et d étaient tous les deux pairs, ce qui contredit le fait que nous avions déjà simplifié la fraction n/d . L'équation $X^2 - 2 = 0$ est donc insoluble, pour celui qui ne recherche que des solutions s'écrivant comme quotient des deux entiers.

Aujourd'hui, on sait qu'en acceptant les nombres irrationnels (non-quotients de deux entiers), l'équation est résoluble, et qu'elle a deux solutions que nous écrivons $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Le nombre $\sqrt{2}$ se calcule aussi loin qu'on le souhaite, bien que son écriture en base 10 (ou n'importe quelle base) ne s'arrête jamais (puisqu'il est irrationnel) : $\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887...$

La morale de cette histoire est que, pour mesurer les objets les plus simples de la géométrie, nous ne pouvons nous contenter des quotients de deux entiers. L'élémentaire figure géométrique d'un carré nous oblige à accepter l'infinité des chiffres de certains nombres. La notion moderne

2. L'équation du cinquième degré

Les équations polynomiales de degré 5 ne possèdent pas toujours de solution s'exprimant à l'aide des coefficients de l'équation, des opérations usuelles (addition, soustraction, multiplication, quotient) et du symbole de racine (cinquième ou autre). Cette insolubilité par radicaux des équations de degré 5 ou plus fut établie par Niels Abel, et précisée par Évariste Galois. Leurs travaux mirent fin à une quête infructueuse de plus de trois siècles, durant lesquels on chercha à généraliser les méthodes de Cardan pour le troisième degré et de Ferrari pour le quatrième.



Abel (1802-1829) et Galois (1811-1832) sont morts jeunes et mal compris. Toutefois le biographe d'Abel, Carl Anton Bjerknes, écrit : « Au reste, ne regrettons pas trop que l'existence d'Abel se soit passée si tristement. Celui qui, pendant toute sa vie, a dû aller à une aussi rude école, a le privilège de voir et de penser autrement que la majorité des hommes ; et si, par ses efforts et ses études profondes, il a acquis le don de lire les pensées des temps à venir, il ne se fait pas l'illusion d'être compris par les siens ou par ses contemporains. Mais, quand le bonheur lui échapperait, il n'en a pas moins beaucoup vu, et il sait qu'il n'a pas vécu en vain. »

La veille de sa mort en duel, Galois annota son mémoire sur la théorie de l'insolubilité des équations de degré supérieur à 5. Pressé par le temps, il écrivit (ci-dessous) : « Il y a quelque chose à compléter dans cette démonstration. Je n'ai pas le temps ».

Il y a quelque chose à compléter dans cette démonstration. Je n'ai pas le temps.

1. Si, après cette question, le groupe est à moitié, elle a moitié.

Si l'on définit r par $f(V, r) = 0$ et $P = p$ facteur de $f(V, r)$, il ne peut arriver $f(V, r) = 0$ et $P = p$ simultanément.