

3. Faisable ou pas ?

Certains problèmes d'équations ou d'inéquations sont traitables par algorithme, d'autres non. Le travail du mathématicien est de préciser l'endroit exact où passe cette frontière entre le possible et l'impossible.

Voici deux exemples, l'un d'un problème décidable et l'autre d'un problème indécidable, proposés en 2002 par Miklós Laczkovich (*Proc. of the Am. Math. Soc.*, vol. 131, pp. 2235-2240).

1) On considère toutes les expressions $f(x)$ utilisant

des nombres entiers, l'addition, la soustraction, la multiplication, x , $\sin(x^n)$, et $\sin(x \cdot \sin(x^n))$.

Exemple : $f(x) = 3 \sin(\sin(x^5)) \sin(x^3) - 1$.

Il n'existe pas d'algorithmes permettant de savoir, pour toute expres-

sion $f(x)$ de ce type, s'il existe un nombre réel x tel que $f(x) > 0$.

2) On considère toutes les expressions $f(x)$ utilisant des nombres entiers, l'addition, la soustraction, la multiplication, x , $\sin(x^n)$, $\cos(x^n)$. Exemple : $f(x) = 3 \sin(x^5) + \cos(x^3) \sin(x^2) - \cos(x^7)$.

On connaît un algorithme permettant de savoir, pour toute expression $f(x)$ de ce type, s'il existe un nombre réel x tel que $f(x) > 0$.

de nombre réel est née d'une insolubilité rencontrée par les Grecs.

Les équations polynomiales à coefficients entiers ont d'ailleurs été à l'origine d'autres progrès mathématiques quelques siècles plus tard, notamment l'introduction des nombres complexes.

L'équation $X^2 + 2X + 2 = 0$ n'a pas de solutions réelles : le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul, d'où : $X^2 + 2X + 2 = X^2 + 2X + 1 + 1 = (X+1)^2 + 1 \geq 1 > 0$.

Aucun nombre réel, rationnel ou irrationnel, ne peut annuler le polynôme qui ne prend que des valeurs strictement positives. On a affaire à une équation insoluble. Comme précédemment, elle ne l'est plus si on élargit notre idée de nombres et qu'on envisage que les nombres négatifs soient des carrés. Jérôme Cardan, au milieu du XVI^e siècle, franchit ce pas téméraire, qui a conduit à la théorie des nombres complexes.

En introduisant un nombre i dont le carré est -1 [c'est-à-dire $i^2 = -1$], on obtient un ensemble de nombres particulièrement intéressants, les nombres complexes. Ils permettent d'affirmer qu'une équation polynomiale de degré n possède toujours n solutions (théorème fondamental de l'algèbre). Un autre énoncé plus précis est que tout polynôme de degré n , à coefficients réels ou complexes, se factorise sous la forme du

produit d'une constante c par n monômes $(X - s)$ avec c et s des nombres complexes (les s sont les racines du polynôme).

Les logiciels de calcul formel utilisent les nombres complexes. Ils indiquent ainsi que l'équation $X^2 + 2X + 2 = 0$ a deux solutions $s_1 = -1 + i$ et $s_2 = -1 - i$, ce qui conduit à la factorisation : $X^2 + 2X + 2 = [X - (-1 + i)][X - (-1 - i)]$. Un autre problème d'équation insoluble est à l'origine de l'algèbre moderne. La méthode apprise au lycée pour résoudre les équations du second degré utilise des racines carrées. Souvenez-vous : $aX^2 + bX + c = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac$, $s = [-b \pm \sqrt{\Delta}]/2a$.

Résoluble par radicaux ?

La méthode s'étend aux équations du second degré à coefficients complexes. Mieux, toujours grâce aux nombres complexes, Cardan montra (en volant semble-t-il l'idée à Niccolò Fontana Tartaglia) que toute équation du troisième degré a des solutions qui s'expriment à l'aide de racines cubiques. Mieux encore, Ludovico Ferrari établit que toute équation du quatrième degré a des solutions qui s'expriment avec des racines quatrièmes. On s'est alors imaginé qu'on trouverait des formules utilisant les racines n -ièmes pour résoudre les équations polynomiales de degré n .

Ce problème de la «résolubilité des équations de degré n par radicaux n -ièmes» se révéla plus coriace que prévu : pendant presque trois siècles, on a essayé en vain de trouver une méthode générale pour les équations de degré 5, qui aurait succédé à celle de Ferrari.

L'illusion fut dissipée quand le mathématicien norvégien Niels Abel (1802-1829) prouva en 1824 que certaines équations de degré 5, comme $X^5 - 3X - 1 = 0$, ne sont pas résolubles par radicaux. Une telle équation a bien cinq solutions comme l'indique le théorème fondamental de l'algèbre, mais on ne peut pas les exprimer en utilisant seulement les notations usuelles et les radicaux cinquièmes (ou autres). Vouloir ne considérer comme nombre que ce qu'on obtient à partir des entiers, des radicaux et des opérations arithmétiques habituelles, comme vouloir se limiter aux nombres quotients d'entiers, rend insolubles des équations qui ont pourtant des solutions. Dit autrement : ajouter $\sqrt{2}$ et les nombres du même type ne suffit pas pour avoir tous les nombres réels.

Notre logiciel de calcul indique que l'équation $X^5 - 3X - 1 = 0$ a trois solutions réelles et deux solutions complexes. Il n'en propose pas des expressions formelles, puisqu'elles n'existent pas, mais il les écrit sous forme approchée quand on le lui demande :

$X_1 = 1,38879198440725...$
 $X_2 = -334734141943352...$
 $X_3 = -1,21464804269846...$
 $X_4 = 0,080295100117... + 1,3283551098...i$
 $X_5 = 0,080295100117... - 1,3283551098...i$

Notons que Abel avait été précédé par le mathématicien italien Paolo Ruffini (1765-1822) qui affirma l'insolubilité par radicaux des équations de degré supérieur à 4, mais sans en proposer de démonstrations satisfaisantes. Le jeune et génial mathématicien français Évariste Galois (1811-1832) perfectionna les résultats d'Abel, ouvrant la voie au point de vue structural en algèbre qui prévaut encore aujourd'hui. Les trois découvreurs de l'insolubilité par radicaux des équations de degré supérieur à 4, du fait de la nouveauté de leurs travaux, ne réussirent que très difficilement à les faire reconnaître par la communauté mathématique. Celle-ci les considéra avec scepticisme ou mépris, avant