

3. Faisable ou pas ?

Certains problèmes d'équations ou d'inéquations sont traitables par algorithme, d'autres non. Le travail du mathématicien est de préciser l'endroit exact où passe cette frontière entre le possible et l'impossible.

Voici deux exemples, l'un d'un problème décidable et l'autre d'un problème indécidable, proposés en 2002 par Miklós Laczkovich (*Proc. of the Am. Math. Soc.*, vol. 131, pp. 2235-2240).

1) On considère toutes les expressions $f(x)$ utilisant

des nombres entiers, l'addition, la soustraction, la multiplication, x , $\sin(x^n)$, et $\sin(x.\sin(x^n))$.

Exemple : $f(x) = 3 \sin(\sin(x^5)) \sin(x^3) - 1$.

Il n'existe pas d'algorithmes permettant de savoir, pour toute expres-

sion $f(x)$ de ce type, s'il existe un nombre réel x tel que $f(x) > 0$.

2) On considère toutes les expressions $f(x)$ utilisant des nombres entiers, l'addition, la soustraction, la multiplication, x , $\sin(x^n)$, $\cos(x^n)$. Exemple : $f(x) = 3\sin(x^5) + \cos(x^3)\sin(x^2) - \cos(x^7)$.

On connaît un algorithme permettant de savoir, pour toute expression $f(x)$ de ce type, s'il existe un nombre réel x tel que $f(x) > 0$.

de nombre réel est née d'une insolubilité rencontrée par les Grecs.

Les équations polynomiales à coefficients entiers ont d'ailleurs été à l'origine d'autres progrès mathématiques quelques siècles plus tard, notamment l'introduction des nombres complexes.

L'équation $X^2 + 2X + 2 = 0$ n'a pas de solutions réelles : le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul, d'où :

$$X^2 + 2X + 2 = X^2 + 2X + 1 + 1 = (X+1)^2 + 1 \geq 1 > 0.$$

Aucun nombre réel, rationnel ou irrationnel, ne peut annuler le polynôme qui ne prend que des valeurs strictement positives. On a affaire à une équation insoluble. Comme précédemment, elle ne l'est plus si on élargit notre idée de nombres et qu'on envisage que les nombres négatifs soient des carrés. Jérôme Cardan, au milieu du XVI^e siècle, franchit ce pas téméraire, qui a conduit à la théorie des nombres complexes.

En introduisant un nombre i dont le carré est -1 (c'est-à-dire $i^2 = -1$), on obtient un ensemble de nombres particulièrement intéressants, les nombres complexes. Ils permettent d'affirmer qu'une équation polynomiale de degré n possède toujours n solutions (théorème fondamental de l'algèbre). Un autre énoncé plus précis est que tout polynôme de degré n , à coefficients réels ou complexes, se factorise sous la forme du

produit d'une constante c par n monômes $(X - s)$ avec c et s des nombres complexes (les s sont les racines du polynôme).

Les logiciels de calcul formel utilisent les nombres complexes. Ils indiquent ainsi que l'équation $X^2 + 2X + 2 = 0$ a deux solutions $s_1 = -1 + i$ et $s_2 = -1 - i$, ce qui conduit à la factorisation : $X^2 + 2X + 2 = [X - (-1 + i)][X - (-1 - i)]$. Un autre problème d'équation insoluble est à l'origine de l'algèbre moderne. La méthode apprise au lycée pour résoudre les équations du second degré utilise des racines carrées. Souvenez-vous : $aX^2 + bX + c = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac$, $s = \{-b \pm \sqrt{\Delta}\}/2a$.

Résoluble par radicaux ?

La méthode s'étend aux équations du second degré à coefficients complexes. Mieux, toujours grâce aux nombres complexes, Cardan montra (en volant semble-t-il l'idée à Niccolo Fontana Tartaglia) que toute équation du troisième degré a des solutions qui s'expriment à l'aide de racines cubiques. Mieux encore, Ludovico Ferrari établit que toute équation du quatrième degré a des solutions qui s'expriment avec des racines quatrièmes. On s'est alors imaginé qu'on trouverait des formules utilisant les racines n -ièmes pour résoudre les équations polynomiales de degré n .

Ce problème de la «résolubilité des équations de degré n par radicaux n -ièmes» se révéla plus coriace que prévu : pendant presque trois siècles, on a essayé en vain de trouver une méthode générale pour les équations de degré 5, qui aurait succédé à celle de Ferrari.

L'illusion fut dissipée quand le mathématicien norvégien Niels Abel (1802-1829) prouva en 1824 que certaines équations de degré 5, comme $X^5 - 3X - 1 = 0$, ne sont pas résolubles par radicaux. Une telle équation a bien cinq solutions comme l'indique le théorème fondamental de l'algèbre, mais on ne peut pas les exprimer en utilisant seulement les notations usuelles et les radicaux cinquièmes (ou autres). Vouloir ne considérer comme nombre que ce qu'on obtient à partir des entiers, des radicaux et des opérations arithmétiques habituelles, comme vouloir se limiter aux nombres quotients d'entiers, rend insolubles des équations qui ont pourtant des solutions. Dit autrement : ajouter $\sqrt{2}$ et les nombres du même type ne suffit pas pour avoir tous les nombres réels.

Notre logiciel de calcul indique que l'équation $X^5 - 3X - 1 = 0$ a trois solutions réelles et deux solutions complexes. Il n'en propose pas des expressions formelles, puisqu'elles n'existent pas, mais il les écrit sous forme approchée quand on le lui demande :

$$\begin{aligned} X_1 &= 1,38879198440725... \\ X_2 &= -334734141943352... \\ X_3 &= -1,21464804269846... \\ X_4 &= 0,080295100117... + 1,3283551098...i \\ X_5 &= 0,080295100117... - 1,3283551098...i \end{aligned}$$

Notons que Abel avait été précédé par le mathématicien italien Paolo Ruffini (1765-1822) qui affirma l'insolubilité par radicaux des équations de degré supérieur à 4, mais sans en proposer de démonstrations satisfaisantes. Le jeune et génial mathématicien français Évariste Galois (1811-1832) perfectionna les résultats d'Abel, ouvrant la voie au point de vue structural en algèbre qui prévaut encore aujourd'hui. Les trois découvreurs de l'insolubilité par radicaux des équations de degré supérieur à 4, du fait de la nouveauté de leurs travaux, ne réussirent que très difficilement à les faire reconnaître par la communauté mathématique. Celle-ci les considéra avec scepticisme ou mépris, avant

d'encenser ces exceptionnels inventeurs... après leur mort.

Cela n'était pas du tout évident au moment où les extensions de la notion de nombres furent proposées, mais la leçon est que si on se donne une équation et un domaine de nombres dans lequel on recherche les solutions, il se peut que la réponse soit : « Dans le domaine où vous recherchez des solutions, vous n'en trouverez pas ! ». En mathématiques, établir « Ce problème n'a pas de solution » est une façon parfaitement satisfaisante de le résoudre... pourvu que l'insolubilité soit démontrée. De plus, se dégager de l'insolubilité en introduisant de nouveaux nombres est une méthode féconde et un moteur efficace du progrès.

Le problème dit des n corps est moins connu, mais d'une nature comparable aux questions que nous venons de mentionner. Il s'agit de déterminer les trajectoires de n corps soumis aux forces de gravitation. Dans le cas de deux corps, la solution des équations a été donnée par Newton. Pour plus de deux corps, le problème est souvent présenté comme insoluble. Pourtant, ce n'est vrai que si l'on recherche des solutions d'un certain type ou par des méthodes fixées à l'avance. On a tort de dire que le problème des n corps est insoluble, en laissant entendre qu'il présente des difficultés mathématiques insurmontables ou qu'il n'a pas du tout de solution.

Ce problème possède des solutions que la nature calcule, seule, sans mal, et que nos machines savent aussi déterminer avec une précision aussi grande qu'on le veut. Les insolubilités mentionnées ne sont que partielles, comme quand on voulait des solutions avec radicaux pour les équations de degré supérieur à 4. Sur un plan pratique, même quand les solutions d'une équation de degré supérieur à 4 ne s'expriment pas avec des radicaux, on sait en calculer des valeurs approchées aussi bonnes qu'on le souhaite. On dispose d'excellentes techniques pour traiter le problème des n corps et mener des simulations de la dynamique de n corps avec un million de corps quand on prend en compte les collisions, et avec un milliard de corps si on néglige les collisions.

Dans le cas du problème des trois corps, quelque chose d'intéressant et d'inattendu se

produit. Une solution analytique exacte a été découverte par Karl Sundman en 1909. Elle se présente sous la forme de séries infinies dont la convergence est extrêmement lente, au point qu'il faudrait utiliser $10^{8000000}$ termes de ces séries pour obtenir une précision équivalente à celle des calculs habituels d'éphémérides. Ces séries sont donc inutiles et, pour résoudre le problème numérique, on utilise des méthodes approchées générales plutôt que les séries de Sundman. Rechercher des solutions ayant de belles expressions mathématiques est ici contre-productif !

Notons que la recherche sur ces sujets se poursuit avec, parfois, d'étonnantes découvertes. En 2013, Milovan Suvakov et Veljko Dmitrasinovic de l'Université de Belgrade découvrirent à l'aide de calcul massif par ordinateur 13 nouvelles familles de solutions périodiques au problème des trois corps, complétant les trois familles périodiques déjà connues, dues à Lagrange et Euler pour la première, à Roger Broucke et Michel Hénon pour la seconde et à Christopher Moore pour la troisième.

Quand le calcul numérique est impossible

Pour de nombreuses familles d'équations, les méthodes numériques donnent des résultats satisfaisants, qu'on cherche bien évidemment à perfectionner, par exemple pour que

la convergence des calculs soit plus rapide – une tâche sans fin. Il existe pourtant un cas remarquable où la situation est désespérée, même en utilisant des méthodes numériques.

Le nombre Ω (oméga) de Chaitin, défini comme une probabilité d'arrêt d'une certaine machine abstraite, est la solution d'une équation faisant intervenir une énumération de machines élémentaires. C'est un nombre parfaitement défini, dont on peut approcher la valeur en menant des calculs, ce qui d'ailleurs a été fait en 2002 par Cristian Calude, Michael Dinneen et Chi-Kou Shu. Cependant, cette résolution d'équation est déconcertante pour une double raison.

– On sait produire des suites de nombres rationnels $\{r_n\}$ ayant Ω pour limite, mais on ne sait pas dire jusqu'où il faudrait aller dans la suite pour avoir une erreur inférieure à $1/n$ par exemple. En calculant $\{r_n\}$ on est certain qu'on s'approche, mais il est impossible de proposer des évaluations de l'erreur qui tendent vers 0 quand n augmente.

– On sait que toute suite de nombres rationnels $\{r_n\}$ calculée par algorithme et approchant Ω le fait plus lentement que n'importe quelle suite calculable de nombres rationnels s'approchant de 0. La convergence vers 0 de l'erreur est assurée, mais elle sera toujours plus lente que celle de $1/n$, plus lente que celle de $1/\lfloor \ln(n) \rfloor$, plus lente que celle de $1/\lfloor \ln(\ln(n)) \rfloor$, etc. $\lfloor x \rfloor$ désigne la

4. L'insolubilité du problème des trois corps

Le problème des n corps en physique donne des équations difficiles à résoudre analytiquement dès que n est supérieur à 2. Mais cette impossibilité de résoudre le problème en produisant des solutions dotées d'expressions mathématiques simples

(il y a diverses façons de définir ce que sont de telles expressions) est analogue à l'impossibilité de la résolution des équations polynomiales de degré 5 par radicaux et ne signifie pas que les équations sont insolubles. Les

méthodes de calcul approché réussissent très bien à les résoudre. On les perfectionne sans relâche et aujourd'hui, on sait simuler la dynamique de systèmes de n corps avec n dépassant un million.

Les progrès réalisés par les méthodes numériques portent aussi sur la classification des solutions périodiques du problème des trois corps. En 2013, Milovan Suvakov et Veljko Dmitrasinovic de l'Université de Belgrade ont ainsi découvert 13 nouvelles familles de solutions périodiques au problème des trois corps. (voir la prépublication <http://arxiv.org/pdf/1303.0181v1.pdf>).