

d'encenser ces exceptionnels inventeurs... après leur mort.

Cela n'était pas du tout évident au moment où les extensions de la notion de nombres furent proposées, mais la leçon est que si on se donne une équation et un domaine de nombres dans lequel on recherche les solutions, il se peut que la réponse soit : « Dans le domaine où vous recherchez des solutions, vous n'en trouverez pas ! ». En mathématiques, établir « Ce problème n'a pas de solution » est une façon parfaitement satisfaisante de le résoudre... pourvu que l'insolubilité soit démontrée. De plus, se dégager de l'insolubilité en introduisant de nouveaux nombres est une méthode féconde et un moteur efficace du progrès.

Le problème dit des n corps est moins connu, mais d'une nature comparable aux questions que nous venons de mentionner. Il s'agit de déterminer les trajectoires de n corps soumis aux forces de gravitation. Dans le cas de deux corps, la solution des équations a été donnée par Newton. Pour plus de deux corps, le problème est souvent présenté comme insoluble. Pourtant, ce n'est vrai que si l'on recherche des solutions d'un certain type ou par des méthodes fixées à l'avance. On a tort de dire que le problème des n corps est insoluble, en laissant entendre qu'il présente des difficultés mathématiques insurmontables ou qu'il n'a pas du tout de solution.

Ce problème possède des solutions que la nature calcule, seule, sans mal, et que nos machines savent aussi déterminer avec une précision aussi grande qu'on le veut. Les insolubilités mentionnées ne sont que partielles, comme quand on voulait des solutions avec radicaux pour les équations de degré supérieur à 4. Sur un plan pratique, même quand les solutions d'une équation de degré supérieur à 4 ne s'expriment pas avec des radicaux, on sait en calculer des valeurs approchées aussi bonnes qu'on le souhaite. On dispose d'excellentes techniques pour traiter le problème des n corps et mener des simulations de la dynamique de n corps avec un million de corps quand on prend en compte les collisions, et avec un milliard de corps si on néglige les collisions.

Dans le cas du problème des trois corps, quelque chose d'intéressant et d'inattendu se

produit. Une solution analytique exacte a été découverte par Karl Sundman en 1909. Elle se présente sous la forme de séries infinies dont la convergence est extrêmement lente, au point qu'il faudrait utiliser $10^{8000000}$ termes de ces séries pour obtenir une précision équivalente à celle des calculs habituels d'éphémérides. Ces séries sont donc inutiles et, pour résoudre le problème numérique, on utilise des méthodes approchées générales plutôt que les séries de Sundman. Rechercher des solutions ayant de belles expressions mathématiques est ici contre-productif !

Notons que la recherche sur ces sujets se poursuit avec, parfois, d'étonnantes découvertes. En 2013, Milovan Suvakov et Veljko Dmitrasinovic de l'Université de Belgrade découvrirent à l'aide de calcul massif par ordinateur 13 nouvelles familles de solutions périodiques au problème des trois corps, complétant les trois familles périodiques déjà connues, dues à Lagrange et Euler pour la première, à Roger Broucke et Michel Hénon pour la seconde et à Christopher Moore pour la troisième.

Quand le calcul numérique est impossible

Pour de nombreuses familles d'équations, les méthodes numériques donnent des résultats satisfaisants, qu'on cherche bien évidemment à perfectionner, par exemple pour que

la convergence des calculs soit plus rapide – une tâche sans fin. Il existe pourtant un cas remarquable où la situation est désespérée, même en utilisant des méthodes numériques.

Le nombre Ω (oméga) de Chaitin, défini comme une probabilité d'arrêt d'une certaine machine abstraite, est la solution d'une équation faisant intervenir une énumération de machines élémentaires. C'est un nombre parfaitement défini, dont on peut approcher la valeur en menant des calculs, ce qui d'ailleurs a été fait en 2002 par Cristian Calude, Michael Dinneen et Chi-Kou Shu. Cependant, cette résolution d'équation est déconcertante pour une double raison.

– On sait produire des suites de nombres rationnels $\{r_n\}$ ayant Ω pour limite, mais on ne sait pas dire jusqu'où il faudrait aller dans la suite pour avoir une erreur inférieure à $1/n$ par exemple. En calculant $\{r_n\}$ on est certain qu'on s'approche, mais il est impossible de proposer des évaluations de l'erreur qui tendent vers 0 quand n augmente.

– On sait que toute suite de nombres rationnels $\{r_n\}$ calculée par algorithme et approchant Ω le fait plus lentement que n'importe quelle suite calculable de nombres rationnels s'approchant de 0. La convergence vers 0 de l'erreur est assurée, mais elle sera toujours plus lente que celle de $1/n$, plus lente que celle de $1/\lfloor \ln(n) \rfloor$, plus lente que celle de $1/\lfloor \ln(\ln(n)) \rfloor$, etc. $\lfloor x \rfloor$ désigne la

4. L'insolubilité du problème des trois corps

Le problème des n corps en physique donne des équations difficiles à résoudre analytiquement dès que n est supérieur à 2. Mais cette impossibilité de résoudre le problème en produisant des solutions dotées d'expressions mathématiques simples

(il y a diverses façons de définir ce que sont de telles expressions) est analogue à l'impossibilité de la résolution des équations polynomiales de degré 5 par radicaux et ne signifie pas que les équations sont insolubles. Les

méthodes de calcul approché réussissent très bien à les résoudre. On les perfectionne sans relâche et aujourd'hui, on sait simuler la dynamique de systèmes de n corps avec n dépassant un million.

Les progrès réalisés par les méthodes numériques portent aussi sur la classification des solutions périodiques du problème des trois corps. En 2013, Milovan Suvakov et Veljko Dmitrasinovic de l'Université de Belgrade ont ainsi découvert 13 nouvelles familles de solutions périodiques au problème des trois corps. (voir la prépublication <http://arxiv.org/pdf/1303.0181v1.pdf>).

5. Les ordinateurs prendront-ils le pouvoir ?

Les logiciels de calcul formel, de démonstration automatique et les assistants de preuve (qui aident le mathématicien à écrire des démonstrations sans erreur) conduisent à une pratique des mathématiques où l'ordinateur tient un rôle de plus en plus important.

Dans un article intitulé *Post-Human Mathematics*, le mathématicien-physicien David Ruelle, professeur honoraire à l'IHÉS, s'interroge sur l'avenir des mathématiques quand les ordinateurs y joueront un rôle peut-être devenu dominant (<http://arxiv.org/pdf/1308.4678.pdf>).

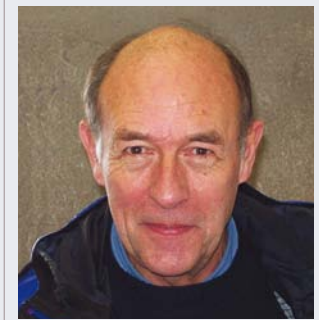
« Ma conclusion temporaire est que nous ne pouvons pas exclure que les ordinateurs puissent penser, mais que s'ils y

arrivent, alors ce sera d'une façon très différente de celle des humains. La situation est un peu semblable à celle de la chimie organique de synthèse : la synthèse de composés organiques n'est pas impossible, loin de là, mais on y arrive en général en procédant d'une façon très différente des organismes vivants. [...] Les mathématiques d'aujourd'hui sont une construction humaine où les

ordinateurs sont de plus en plus utilisés, mais ne jouent pas un rôle créatif.

La situation pourrait changer : les ordinateurs pourraient devenir créatifs, et puisqu'ils fonctionnent d'une manière très différente des cerveaux humains, ils pourraient produire des mathématiques très différentes. [...] Je ne suis pas impatient de voir les ordinateurs remplacer les mathématiciens humains. Ce serait, ou ce sera, une chose triste à certains égards, mais je ne veux pas être aveugle à cette éventualité. Les effets de la synthèse organique industrielle sur l'humanité ont été

énormes, ce fut parfois bien et parfois terrible, mais aucun retour en arrière à l'époque pré-Wohler n'est possible. De même, les mathématiques entrent probablement dans une ère nouvelle, et il est sans aucun doute intéressant de deviner ce qu'elle sera. »



partie entière de x , utilisée ici pour avoir des suites de nombres rationnels].

L'équation dont Ω est solution est donc insoluble en ce sens qu'aucune méthode ne sera jamais efficace pour en calculer la solution même de manière approchée. Cette forme d'insolubilité pratique que la théorie du calcul et la logique mathématique nous offrent ici est loin d'être la seule que le XX^e siècle a mise en évidence. Elle prolonge les résultats d'insolubilité de Ruffini, Abel et Galois.

Des algorithmes pour toute équation ?

Nous qualifierons cependant tous ces cas d'insolubilité de bénins : on sait que l'équation n'a pas de solution ou on sait que, du fait de sa nature, elle a des solutions qu'on ne connaîtra que de manière approchée et même parfois sans pouvoir contrôler l'erreur, mais au fond, l'équation est quand même traitée. Ce qui importe pour le mathématicien et encore plus pour l'ingénieur qui perfectionne les programmes de calcul formel est la mise au point de méthodes générales permettant de résoudre une famille d'équations.

En algèbre linéaire, on sait par exemple comment s'y prendre face à n'importe quel système d'équations du type :

$$x + 2y + 3z = 1,$$

$$x + 3y + 2z = 1,$$

$$3x + y + 2z = 1,$$

dont $x = y = z = 1/6$ est l'unique solution, ce qu'un logiciel de calcul formel trouve immédiatement. La présence de coefficients irrationnels ne gêne pas un bon logiciel, qui résoudra sans plus de peine un système tel que :

$$x + 2y + 3z = \pi + 5,$$

$$2x + 3y + 2z = 2\pi + 5,$$

$$3x + \pi y + \pi z = 5\pi,$$

dont les solutions sont $x = \pi, y = z = 1$.

Des algorithmes mis au point par les mathématiciens sont introduits dans le programme des logiciels de calcul formel. Ils traitent donc parfaitement des familles entières d'équations et de systèmes d'équations, voire d'inéquations. La question est alors de savoir si on pourra toujours aller plus loin dans la mise au point d'algorithmes qui fonctionneraient pour des familles variées d'équations et d'inéquations, de plus en plus vastes.

Par expérience, on sait depuis longtemps qu'il est difficile de résoudre les équations

polynomiales à coefficients entiers comme $X^2 + 5Y^3 + 2Z^4 = 11$ dont on cherche des solutions entières. Ces équations sont dites diophantiennes (en l'honneur du mathématicien grec Diophante d'Alexandrie). David Hilbert affirma en 1900 qu'il n'existait probablement pas de méthode générale pour les résoudre. L'un des grands succès de la logique mathématique fut de donner un sens et une démonstration à cette intuition. Achievant un travail commencé par les chercheurs américains Martin Davis, Hilary Putnam et Julia Robinson, le mathématicien russe Yuri Matiyasevich prouva en 1970 qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de savoir, pour toute équation diophantienne, si elle a ou non des solutions entières.

Cette « indécidabilité du dixième problème de Hilbert » signifie que les logiciels de calcul formel ne sont pas tout-puissants. Jamais on n'en programmera un qui, face à n'importe quelle équation diophantienne, saura dire si elle possède des solutions entières, et *a fortiori* les déterminer quand il y en a.

Aujourd'hui encore, on s'intéresse aux équations diophantiennes. On recherche non plus des solutions qui soient des nombres entiers, mais des nombres appartenant à d'autres structures algébriques. Des résultats