

Les notes de Ramanujan

un trésor inépuisé

Ariel Bleicher

Au début du XX^e siècle, le prodige indien Srinivasa Ramanujan a couvert plusieurs carnets de résultats mathématiques étonnants. Les mathématiciens s'en inspirent encore pour faire de nouvelles découvertes.

Un samedi matin de 1984, alors que Ken Ono est encore lycéen, il ouvre la boîte aux lettres familiale à Baltimore, aux États-Unis, et y trouve une enveloppe fine comme du papier de riz et couverte de timbres colorés. Elle est destinée à son père, un mathématicien japonais peu expansif. Quand K. Ono lui tend ce courrier, son père lève les yeux du bloc-notes jaune sur lequel il est occupé à griffonner des équations et pose son stylo. Délicatement, il décachette l'enveloppe et déplie la lettre qu'elle contient.

« Cher Monsieur », commence-t-elle, « J'ai appris [...] que vous avez contribué à la sculpture en mémoire de feu mon mari [...]. J'en suis heureuse. » Et elle est signée « S. Janaki Amal », que l'en-tête à l'encre rouge identifie comme la veuve de « (Feu) Srinivasa Ramanujan (Génie Mathématique) ».

C'est la première fois que le jeune K. Ono entend parler de Ramanujan. Autodidacte indien, le prodige mathématique Ramanujan a énoncé il y a presque un siècle des propriétés qui « semblaient à peine

L'ESSENTIEL

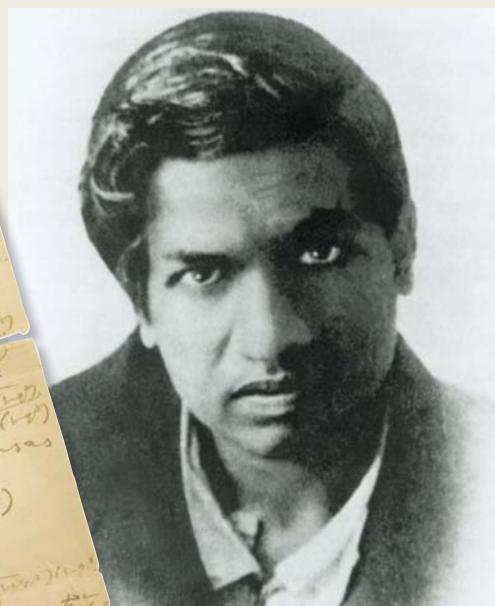
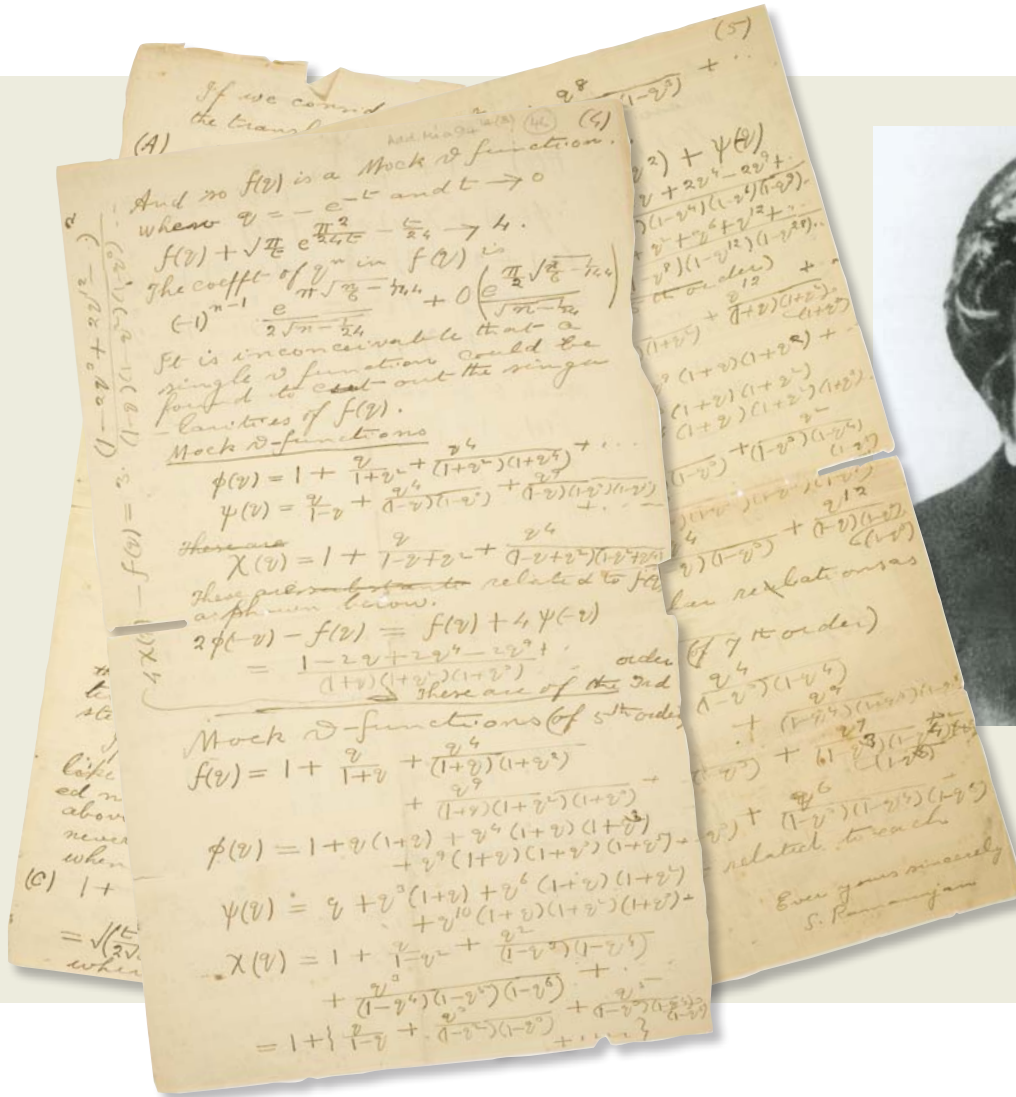
- L'autodidacte indien Srinivasa Ramanujan avait noté plus de 3 000 formules et propriétés liées à la théorie des nombres. Beaucoup se sont révélées exactes et ont inspiré les générations suivantes de chercheurs.
- Ken Ono et d'autres mathématiciens ont récemment découvert dans certaines des notes de Ramanujan d'autres idées fécondes.
- Ces travaux de mathématiques pures pourraient aussi servir dans d'autres domaines, tels que la cryptographie.

Pages des carnets : Jon Smith, Trinity College, Université de Cambridge. Photo de Ramanujan : Science Source

croyables », comme l'écrivait son collègue britannique Godfrey Harold Hardy. Pourtant, ses travaux ont inspiré des domaines entièrement nouveaux des mathématiques et des théories qui, dans plusieurs cas, ont valu à leurs concepteurs la médaille Fields, l'équivalent pour les mathématiques du prix Nobel.

Pendant ses études de mathématiques, K. Ono, aujourd'hui professeur de théorie des nombres à l'Université Emory, en Géorgie, n'a jamais eu de raison de prêter particulièrement attention à Ramanujan. À sa connaissance, le « Génie Mathématique » n'avait laissé derrière lui aucune intuition nouvelle en rapport avec sa spécialité en théorie des nombres, les « formes modulaires », des objets abstraits quadridimensionnels dotés de remarquables propriétés de symétrie (voir l'encadré page 53).

Ramanujan fit toutefois une réapparition spectaculaire dans la vie de K. Ono en 1998, quand il avait 29 ans. Alors qu'il rassemblait les travaux du prodige pour en présenter une anthologie, Bruce Berndt, mathématicien de l'Université de l'Illinois



1. AVANT DE MOURIR, Ramanujan (1887-1920) avait rempli plusieurs carnets de plus de 3 000 propositions, souvent profondes, portant sur la théorie des nombres. Les mathématiciens découvrent encore aujourd'hui dans ses notes des idées intéressantes.

à Urbana-Champaign, a mis la main sur un manuscrit passé plutôt inaperçu. Comme le texte traitait des formes modulaires, B. Berndt le scanna et l'envoya par courrier électronique à K. Ono, pensant qu'il parviendrait peut-être à déchiffrer certains énoncés étranges.

Parvenu aux deux tiers du manuscrit, K. Ono s'arrêta. De son écriture d'écolier soigneux, Ramanujan avait inscrit six énoncés mathématiques qui semblaient très bizarres à K. Ono, alors qu'ils touchaient à sa spécialité. Pour K. Ono, ces propositions étaient sûrement fausses. «Je les ai regardées et je me suis dit : "Impossible. C'est n'importe quoi." » Sa première réaction fut de tenter de prouver que Ramanujan avait tort.

Nul ne sait comment Ramanujan est parvenu à tous les résultats qu'il a consignés. Il s'est instruit tout seul en utilisant un manuel anglais dépassé et, vers l'âge de 25 ans, tout en travaillant comme employé du gouvernement, il a commencé à faire part de ses idées dans des lettres adressées à des mathématiciens anglais. Il reçut une

seule réponse positive. Elle provenait de Hardy, alors jeune professeur à l'avenir prometteur, qui l'invita à venir travailler avec lui à Cambridge. Après deux ans seulement passés à l'étranger, Ramanujan tomba malade, à la suite des pénuries de nourriture de la Première Guerre mondiale. Amaigri et fiévreux, il rentra en Inde où il mourut en 1920. Il n'avait que 32 ans.

Une mine d'idées en héritage

Outre 37 articles publiés, Ramanujan a laissé derrière lui des lettres, des manuscrits partiellement achevés et trois carnets de notes reliés de cuir. En les examinant, Hardy et d'autres mathématiciens ont trouvé qu'il avait redécouvert des théorèmes classiques de la théorie des nombres, initialement démontrés par des sommités des mathématiques. Ramanujan avait en outre noté d'autres propriétés que personne n'avait vues. Un mathématicien de métier aurait le réflexe d'étayer chaque affirmation par une démonstration. Mais Ramanujan

ne s'en donnait pas la peine. Il remplissait page après page de longues listes de théorèmes et de calculs qu'il traitait de tête ou sur une ardoise, et notait rarement comment il avait obtenu ses résultats. Les trois carnets contiennent à eux seuls plus de 3 000 énoncés de ce type et, depuis la mort de Ramanujan, les mathématiciens ont investi beaucoup d'efforts pour les confirmer ou les infirmer.

B. Berndt avait commencé à creuser les archives de Ramanujan dans les années 1970. Il n'avait pas encore fini plus de deux décennies après, quand il mit la main sur le manuscrit contenant les six propositions bizarres que K. Ono était bien décidé à réfuter. Ces énoncés dressent un parallèle entre les formes modulaires et les nombres de partitions des entiers. Ces nombres constituent une suite d'entiers dénombrant toutes les façons d'additionner des entiers plus petits pour obtenir celui de départ. Les nombres de partitions des entiers sont donnés par la fonction $p(n)$, qui compte les combinaisons d'entiers positifs dont la somme est