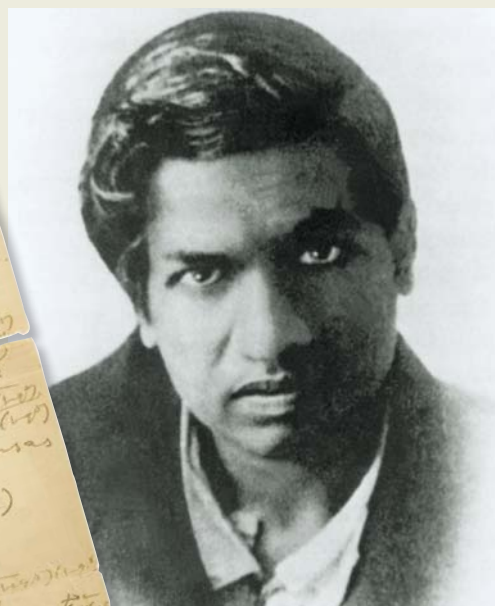
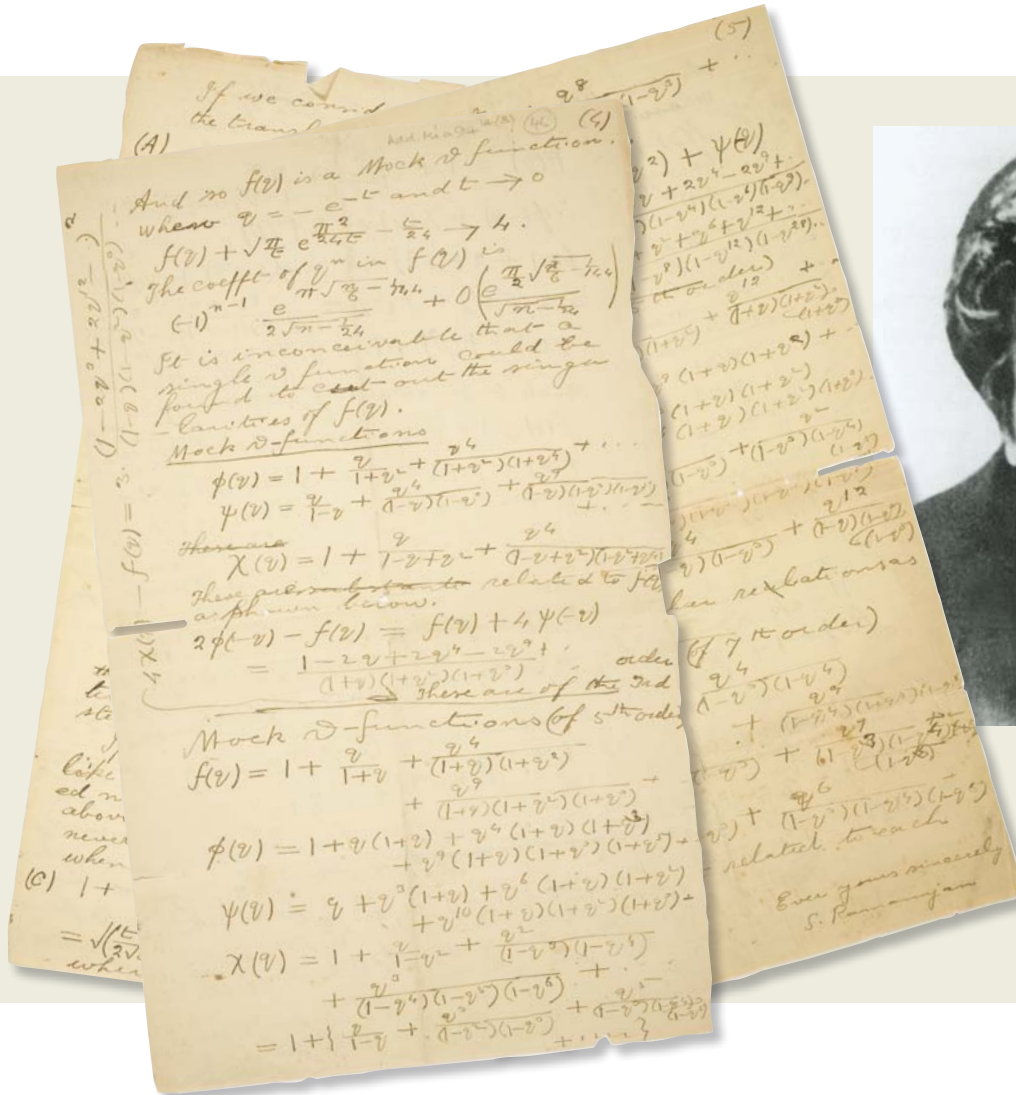




1. AVANT DE MOURIR,
Ramanujan (1887-1920) avait
rempli plusieurs carnets de plus
de 3 000 propositions,
souvent profondes, portant
sur la théorie des nombres.
Les mathématiciens découvrent
encore aujourd'hui dans ses notes
des idées intéressantes.

à Urbana-Champaign, a mis la main sur un manuscrit passé plutôt inaperçu. Comme le texte traitait des formes modulaires, B. Berndt le scanna et l'envoya par courrier électronique à K. Ono, pensant qu'il parviendrait peut-être à déchiffrer certains énoncés étranges.

Parvenu aux deux tiers du manuscrit, K. Ono s'arrêta. De son écriture d'écolier soigneux, Ramanujan avait inscrit six énoncés mathématiques qui semblaient très bizarres à K. Ono, alors qu'ils touchaient à sa spécialité. Pour K. Ono, ces propositions étaient sûrement fausses. «Je les ai regardées et je me suis dit : "Impossible. C'est n'importe quoi." » Sa première réaction fut de tenter de prouver que Ramanujan avait tort.

Nul ne sait comment Ramanujan est parvenu à tous les résultats qu'il a consignés. Il s'est instruit tout seul en utilisant un manuel anglais dépassé et, vers l'âge de 25 ans, tout en travaillant comme employé du gouvernement, il a commencé à faire part de ses idées dans des lettres adressées à des mathématiciens anglais. Il reçut une

seule réponse positive. Elle provenait de Hardy, alors jeune professeur à l'avenir prometteur, qui l'invita à venir travailler avec lui à Cambridge. Après deux ans seulement passés à l'étranger, Ramanujan tomba malade, à la suite des pénuries de nourriture de la Première Guerre mondiale. Amaigri et fiévreux, il rentra en Inde où il mourut en 1920. Il n'avait que 32 ans.

Une mine d'idées en héritage

Outre 37 articles publiés, Ramanujan a laissé derrière lui des lettres, des manuscrits partiellement achevés et trois carnets de notes reliés de cuir. En les examinant, Hardy et d'autres mathématiciens ont trouvé qu'il avait redécouvert des théorèmes classiques de la théorie des nombres, initialement démontrés par des sommités des mathématiques. Ramanujan avait en outre noté d'autres propriétés que personne n'avait vues. Un mathématicien de métier aurait le réflexe d'étayer chaque affirmation par une démonstration. Mais Ramanujan

ne s'en donnait pas la peine. Il remplissait page après page de longues listes de théorèmes et de calculs qu'il traitait de tête ou sur une ardoise, et notait rarement comment il avait obtenu ses résultats. Les trois carnets contiennent à eux seuls plus de 3 000 énoncés de ce type et, depuis la mort de Ramanujan, les mathématiciens ont investi beaucoup d'efforts pour les confirmer ou les infirmer.

B. Berndt avait commencé à creuser les archives de Ramanujan dans les années 1970. Il n'avait pas encore fini plus de deux décennies après, quand il mit la main sur le manuscrit contenant les six propositions bizarres que K. Ono était bien décidé à réfuter. Ces énoncés dressent un parallèle entre les formes modulaires et les nombres de partitions des entiers. Ces nombres constituent une suite d'entiers dénombrant toutes les façons d'additionner des entiers plus petits pour obtenir celui de départ. Les nombres de partitions des entiers sont donnés par la fonction $p(n)$, qui compte les combinaisons d'entiers positifs dont la somme est

égale à un entier n donné. Par exemple, $p(4)$ est égal à 5, car on a cinq combinaisons donnant le nombre 4 : $1 + 1 + 1 + 1$, $1 + 1 + 2$, $2 + 2$, $1 + 3$ et 4.

La fonction $p(n)$ et les nombres qu'elle produit ne constituent un problème simple qu'en apparence. Des siècles durant, les mathématiciens ont peiné pour trouver parmi ces nombres des motifs qui permettraient de les prédire, de les calculer ou de les relier à d'autres fonctions et théorèmes. Et c'est Ramanujan qui fit la première percée significative. Avec Hardy, il mit au point une méthode pour trouver rapidement une valeur approximative des nombres de partitions des entiers. Afin de vérifier l'exactitude de leurs approximations, ils firent appel à Percy Alexander MacMahon, commandant dans l'artillerie britannique à la retraite et as du calcul, pour déterminer à la main les 200 premiers nombres de partitions (les valeurs de $p(n)$ pour n allant de 1 à 200).

Partitions des entiers : des propriétés cachées

Les approximations de Ramanujan et Hardy se révélèrent remarquablement précises. Plus important, l'étude de la liste de MacMahon a conduit Ramanujan à l'une de ses observations les plus célèbres. MacMahon avait disposé les valeurs de $p(n)$, en commençant par la convention $p(0) = 1$, en cinq colonnes. Ramanujan remarqua que toutes les entrées de la dernière colonne – c'est-à-dire tous les cinq nombres de partitions en commençant par $p(4)$ – sont divisibles par 5, et il prouva que cette propriété est valable pour tout le reste de la suite des nombres de partitions (voir la figure 2). Autrement dit, $p(5k - 1)$ est divisible par 5 pour tout entier positif k . C'était stupéfiant : les partitions concernent des additions de nombres, et personne n'imaginait qu'elles pouvaient avoir des propriétés faisant intervenir la division.

Ramanujan repéra d'autres motifs similaires. Il prouva ainsi que tous les sept nombres de partitions des entiers, en commençant par $p(5)$, on a un multiple de 7 (c'est-à-dire que $p(7k - 2)$ est divisible par 7 pour tout entier positif k). De même, tous les 11 nombres de partitions à partir de $p(6)$, on a un multiple de 11 : $p(11k - 5)$ est divisible par 11 pour tout entier positif k . Mystérieusement, les « congruences de Ramanujan » s'arrêtaient

1	1	2	3	5
7	11	15	22	30
42	56	77	101	135
176	231	297	385	490
627	792	1002	1255	1575

2. LE NOMBRE DE PARTITIONS d'un entier n est le nombre $p(n)$ de façons dont il peut s'écrire comme une somme d'entiers positifs. Ramanujan a remarqué que tous les cinq nombres dans la suite $p(n)$, on a un multiple de 5 (colonne de droite), et il a prouvé que cette propriété se répète à l'infini.

L'AUTEUR



Ariel BLEICHER est journaliste scientifique indépendante à New York. Elle a notamment

fait partie de la rédaction de la revue de technologie *IEEE Spectrum*.

BIBLIOGRAPHIE

M. J. Griffin et al., *A framework of Rogers-Ramanujan identities and their arithmetic properties*, prépublication, 2014 (<http://arxiv.org/abs/1401.7718>).

M. J. Griffin et al., *Ramanujan's mock theta functions*, *Proc. of the Nat. Acad. of Sci. USA*, vol. 110(15), pp. 5765-5768, 2013.

A. Folsom et al., *l -adic properties of the partition function*, *Advances in Mathematics*, vol. 229(3), pp. 1586-1609, 2012.

J. Borwein et P. Borwein, *Srinivasa Ramanujan*, dans *Les mathématiciens*, Belin-Pour la Science, pp. 262-275, 2010.

là. « Il semble qu'il n'y ait pas de propriétés aussi simples pour des modules impliquant des nombres premiers autres que ceux-ci », écrivit Ramanujan dans un article de 1919, en se référant aux nombres premiers 5, 7 et 11.

Après sa mort, des mathématiciens ont cherché à savoir si les partitions des entiers présentaient des propriétés moins simples. Mais à la fin des années 1990, il n'avaient pas mis au jour plus d'une poignée de congruences supplémentaires faisant intervenir certains nombres premiers et puissances de nombres premiers, sans régularité apparente (dont 29, 17^3 et 23^6). Ils ont commencé à suspecter que de tels motifs étaient imprévisibles et extrêmement rares.

Mais quand K. Ono lut les six propositions évoquées plus haut, il comprit qu'elles pourraient contredire cette impression. Les mathématiciens pensaient depuis longtemps que les nombres de partitions des entiers sont seulement reliés à un sous-ensemble de formes modulaires avec lesquelles il est difficile de travailler. Or les six propositions de Ramanujan relient les deux domaines d'une façon profonde que nul n'avait anticipé.

Les formules étaient correctes à chaque fois

Comme Ramanujan ne consignait pas ses démonstrations, K. Ono ne put identifier directement ses erreurs de raisonnement. Il décida donc de tester, avec divers nombres, les formules avancées par Ramanujan. Or ces formules étaient correctes à chaque fois. K. Ono se rendit compte que Ramanujan devait avoir raison « parce que l'on ne peut pas être assez créatif pour inventer quelque chose de ce genre et que ce soit vrai 100 fois, à moins de savoir pourquoi cette formule est vraie, toujours ». Il ferma alors les yeux et réfléchit intensément : qu'avait donc compris Ramanujan et qui a échappé à tous les autres ?

K. Ono savait que les formes modulaires sont « parsemées de congruences » – ces propriétés de divisibilité dont Ramanujan avait trouvé quelques exemples parmi les nombres de partitions des entiers. En réfléchissant aux six propositions, l'idée vint à l'esprit de K. Ono que s'il envisageait la fonction $p(n)$ comme une forme modulaire déguisée, il pourrait montrer qu'elles sont vraies.