égale à un entier n donné. Par exemple, $p(4)$ est égal à 5, car on a cinq combinaisons donnant le nombre 4 : 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 2, 2 + 2, 1 + 3 et 4.

La fonction $p(n)$ et les nombres qu'elle produit ne constituent un problème simple qu'en apparence. Des siècles durant, les mathématiciens ont peiné pour trouver parmi ces nombres des motifs qui permettraient de les prédire, de les calculer ou de les relier à d'autres fonctions et théorèmes. Et c'est Ramanujan qui fit la première percée significative. Avec Hardy, il mit au point une méthode pour trouver rapidement une valeur approximative des nombres de partitions des entiers. Afin de vérifier l'exactitude de leurs approximations, ils firent appel à Percy Alexander MacMahon, commandant dans l'artillerie britannique à la retraite et as du calcul, pour déterminer à la main les 200 premiers nombres de partitions (les valeurs de $p(n)$ pour n allant de 1 à 200).

Partitions des entiers : des propriétés cachées

Les approximations de Ramanujan et Hardy se révélèrent remarquablement précises. Plus important, l'étude de la liste de MacMahon a conduit Ramanujan à l'une de ses observations les plus célèbres. MacMahon avait disposé les valeurs de $p(n)$, en commençant par la convention $p(0) = 1$, en cinq colonnes. Ramanujan remarqua que toutes les entrées de la dernière colonne – c'est-à-dire tous les cinq nombres de partitions en commençant par $p(4)$ – sont divisibles par 5, et il prouva que cette propriété est valable pour tout le reste de la suite des nombres de partitions *(voir la figure 2)*. Autrement dit, $p(5k – 1)$ est divisible par 5 pour tout entier positif k. C'était stupéfiant : les partitions concernent des additions de nombres, et personne n'imaginait qu'elles pouvaient avoir des propriétés faisant intervenir la division.

Ramanujan repéra d'autres motifs similaires. Il prouva ainsi que tous les sept nombres de partitions des entiers, en commençant par $p(5)$, on a un multiple de 7 (c'est-à-dire que $p(7k – 2)$ est divisible par 7 pour tout entier positif k). De même, tous les 11 nombres de partitions à partir de $p(6)$, on a un multiple de 11 : $p(11k – 5)$ est divisible par 11 pour tout entier positif k. Mystérieusement, les « congruences de Ramanujan » s'arrêtaient là. « Il semble qu'il n'y ait pas de propriétés aussi simples pour des modules impliquant des nombres premiers autres que ceux-ci », écrivit Ramanujan dans un article de 1919, en se référant aux nombres premiers 5, 7 et 11.

1	1	2	3	5
7	11	15	22	30
42	56	77	101	135
176	231	297	385	490
627	792	1002	1255	1575

2. LE NOMBRE DE PARTITIONS d'un entier n est le nombre $p(n)$ de façons dont il peut s'écrire comme une somme d'entiers positifs. Ramanujan a remarqué que tous les cinq nombres dans la suite $p(n)$, on a un multiple de 5 *(colonne de droite)*, et il a prouvé que cette propriété se répète à l'infini.

Après sa mort, des mathématiciens ont cherché à savoir si les partitions des entiers présentaient des propriétés moins simples. Mais à la fin des années 1990, il n'avaient pas mis au jour plus d'une poignée de congruences supplémentaires faisant intervenir certains nombres premiers et puissances de nombres premiers, sans régularité apparente (dont 29, 17^3 et 23^6). Ils ont commencé à suspecter que de tels motifs étaient imprévisibles et extrêmement rares.

Mais quand K. Ono lut les six propositions évoquées plus haut, il comprit qu'elles pourraient contredire cette impression. Les mathématiciens pensaient depuis longtemps que les nombres de partitions des entiers sont seulement reliés à un sous-ensemble de formes modulaires avec lesquelles il est difficile de travailler. Or les six propositions de Ramanujan relient les deux domaines d'une façon profonde que nul n'avait anticipé.

Les formules étaient correctes à chaque fois

Comme Ramanujan ne consignait pas ses démonstrations, K. Ono ne put identifier directement ses erreurs de raisonnement. Il décida donc de tester, avec divers nombres, les formules avancées par Ramanujan. Or ces formules étaient correctes à chaque fois. K. Ono se rendit compte que Ramanujan devait avoir raison « parce que l'on ne peut pas être assez créatif pour inventer quelque chose de ce genre et que ce soit vrai 100 fois, à moins de savoir pourquoi cette formule est vraie, toujours ». Il ferma alors les yeux et réfléchit intensément : qu'avait donc compris Ramanujan et qui a échappé à tous les autres ?

K. Ono savait que les formes modulaires sont « parsemées de congruences » – ces propriétés de divisibilité dont Ramanujan avait trouvé quelques exemples parmi les nombres de partitions des entiers. En réfléchissant aux six propositions, l'idée vint à l'esprit de K. Ono que s'il envisageait la fonction $p(n)$ comme une forme modulaire déguisée, il pourrait montrer qu'elles sont vraies.

L'AUTEUR

Ariel BLEICHER est journaliste scientifique indépendante à New York. Elle a notamment fait partie de la rédaction de la revue de technologie *IEEE Spectrum*.

BIBLIOGRAPHIE

M. J. Griffin *et al.*, **A framework of Rogers-Ramanujan identities and their arithmetic properties**, prépublication, 2014 (http://arxiv.org/abs/1401.7718).

M. J. Griffin *et al.*, **Ramanujan's mock theta functions**, *Proc. of the Nat. Acad. of Sci. USA*, vol. 110(15), pp. 5765-5768, 2013.

A. Folsom *et al.*, **l-adic properties of the partition function**, *Advances in Mathematics*, vol. 229(3), pp. 1586-1609, 2012.

J. Borwein et P. Borwein, **Srinivasa Ramanujan**, dans *Les mathématiciens*, Belin-Pour la Science, pp. 262-275, 2010.

Une autre idée suivit dans la foulée : il s'aperçut qu'avec quelques ajustements, les théories qu'il avait développées sur les formes modulaires pouvaient être de puissants outils non seulement pour vérifier les énoncés de Ramanujan, mais aussi pour mettre au jour des propriétés plus profondes de la fonction $p(n)$.

Multiples congruences...

K. Ono parvint ainsi à prouver que les congruences des nombres de partitions des entiers ne sont pas rares du tout. Les mathématiciens avaient supposé qu'il y en avait peu au-delà de 5, 7 et 11. En fait, comme le découvrit K. Ono, il en existe une infinité.

Les collègues de K. Ono saluèrent cette découverte, mais cela ne lui suffit pas pour être satisfait. Il avait beau avoir prouvé que les congruences des nombres de partitions des entiers sont partout, il n'était pas en mesure de déterminer où précisément.

Quand K. Ono bute sur un problème, il le met de côté avec d'autres problèmes non résolus jusqu'à ce qu'il refasse naturellement surface. Le problème de la prédiction des congruences des nombres de partitions resta ainsi en sommeil pendant cinq ans, jusqu'à l'arrivée du postdoctorant Zachary Kent à l'Université Emory, au printemps de 2010. Il surgit alors un jour au hasard d'une conversation, et bientôt ils ne parlèrent plus que de cela – dans leurs bureaux, à la pause café et lors de longues promenades dans les bois au Nord d'Atlanta.

Petit à petit, ils ont mentalement construit une superstructure labyrinthique où les nombres de partitions peuvent être parfaitement rangés. Pour ce faire, ils ont fait appel à des méthodes p-adiques, où l'on considère les objets arithmétiques à des multiples près des puissances successives d'un nombre premier p (par exemple 13, 13^2, 13^3 et ainsi de suite). Or les nombres ainsi obtenus obéissent à une structure fractale : ils se répètent selon des motifs presque identiques à différentes échelles, comme les branches successives d'un cristal de glace. Ce résultat montre que les nombres de partitions des entiers ne sont pas simplement une séquence aléatoire de nombres avec des symétries fortuites ici ou là. Au contraire, ces nombres ont « une structure interne d'une grande beauté », explique K. Ono, qui les rend prévisibles et bien plus fascinants à étudier.

Il fallut plusieurs mois à K. Ono, Z. Kent et leur collaboratrice Amanda Folsom de

Formes modulaires et fonctions thêta

Les formes modulaires et les fonctions thêta sont des fonctions de variables complexes vérifiant certaines relations fonctionnelles ; elles incarnent de multiples phénomènes liés à la géométrie algébrique, l'arithmétique et la théorie des groupes.

Plusieurs des grands noms des mathématiques du XIX^{e} siècle leur sont associés : Gotthold Eisenstein, Carl Gustav Jacobi, Henri Poincaré, Bernhard Riemann... De nos jours, ces fonctions et leurs généralisations interviennent dans la théorie des représentations des groupes, des courbes elliptiques et des variétés abéliennes, domaines importants des mathématiques du XX^{e} siècle.

Notons $\Sigma_{n \geq 0}$ l'opération de somme sur tous les entiers n positifs ou nuls. Une forme modulaire en la variable complexe z peut être vue comme une série infinie $f(z) = \Sigma_{n \geq 0} a_n q^n$ où $q = e^{2\pi i z}$, convergente quand la partie imaginaire de z est strictement positive (donc pour $|q| < 1$), et qui, principalement, obéit à l'équation fonctionnelle :

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^k f(z),$$

pour des entiers a, b, c, d vérifiant $ad - bc = 1$ et des propriétés de congruence telles que, par exemple, « N divise c ». L'entier N est le « niveau » et k est le « poids » de la forme modulaire. Les formes modulaires de poids 2 ont joué un rôle fondamental dans la preuve par Andrew Wiles du grand théorème de Fermat, en 1994 (théorème selon lequel il n'existe pas d'entiers positifs x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$, dès que l'entier n est supérieur à 2).

Le lien des formes modulaires avec les courbes elliptiques peut être illustré avec l'exemple de la courbe $y^2 - y = x^3 - x$.

Pour tout nombre premier p, notons N_p le nombre de solutions de cette équation modulo p (c'est-à-dire à un multiple de p près) et posons : $a(p) = p - N_p$.

Étendons la suite des $a(p)$ à tous les entiers positifs (premiers ou non) par les règles $a(p^m) - a(p)\,a(p^{m-1}) + p\,a(p^{m-2}) = 0$ et $a(n\,m) = a(n)\,a(m)$ pour n et m premiers entre eux. Alors d'après un cas particulier du théorème de A. Wiles, la fonction $f = \Sigma a(n)\,q^n$ est une forme modulaire de poids 2 et de niveau 37.

Quant aux fonctions thêta, la fonction typique est la fonction de deux variables suivante :

$\theta(u, z) = \Sigma_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} t^n$

REPRÉSENTATION DE LA partie réelle d'une fonction modulaire liée aux « fonctions elliptiques de Weierstrass », sur le disque $|q| < 1$ (nombres complexes q dont le module est inférieur à 1). Les régions où la partie réelle de la fonction est nulle sont en noir (les valeurs sont croissantes du bleu-vert au jaune-rouge).

avec $q = e^{2\pi i z}$ et $t = e^{2\pi i u}$ et où $\Sigma_{n \in \mathbb{Z}}$ désigne la somme sur tous les entiers relatifs n (négatifs et positifs).

En tant que fonction de u, la fonction θ vérifie :
$\theta(u + az + b) = e(z, u)\,\theta(u, z)$,
où $e(z, u)$ est un facteur non nul ayant une expression simple.

En prenant $u = 0$, la fonction $\theta_0(z) = \Sigma_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}$ est une forme modulaire « tordue » de poids 1/2 ; elle vérifie notamment :
$\theta_0(-1/z) = \alpha\, z^{1/2}\,\theta_0(z)$
où $\alpha = e^{-i\pi/4}$.

Les fonctions thêta recèlent une foule d'informations arithmétiques. On a par exemple remarqué que
$\theta_0{}^4(z) = 1 + \Sigma_{n > 1} r(n)\,q^n$
où $r(n)$ est le nombre de représentations de l'entier n comme somme de quatre carrés d'entiers ; cela a permis à Jacobi de démontrer que $r(n)$ est égal à huit fois la somme des diviseurs de n si n est impair, et à 24 fois la somme des diviseurs impairs de n si n est pair.

– Marc Hindry
Institut de mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche