

Une autre idée suivit dans la foulée : il s'aperçut qu'avec quelques ajustements, les théories qu'il avait développées sur les formes modulaires pouvaient être de puissants outils non seulement pour vérifier les énoncés de Ramanujan, mais aussi pour mettre au jour des propriétés plus profondes de la fonction $p(n)$.

Multiples congruences...

K. Ono parvint ainsi à prouver que les congruences des nombres de partitions des entiers ne sont pas rares du tout. Les mathématiciens avaient supposé qu'il y en avait peu au-delà de 5, 7 et 11. En fait, comme le découvrit K. Ono, il en existe une infinité.

Les collègues de K. Ono saluèrent cette découverte, mais cela ne lui suffit pas pour

être satisfait. Il avait beau avoir prouvé que les congruences des nombres de partitions des entiers sont partout, il n'était pas en mesure de déterminer où précisément.

Quand K. Ono bute sur un problème, il le met de côté avec d'autres problèmes non résolus jusqu'à ce qu'il refasse naturellement surface. Le problème de la prédiction des congruences des nombres de partitions resta ainsi en sommeil pendant cinq ans, jusqu'à l'arrivée du postdoctorant Zachary Kent à l'Université Emory, au printemps de 2010. Il surgit alors un jour au hasard d'une conversation, et bientôt ils ne parlèrent plus que de cela – dans leurs bureaux, à la pause café et lors de longues promenades dans les bois au Nord d'Atlanta.

Petit à petit, ils ont mentalement construit une superstructure labyrinthique où les nombres de partitions peuvent être

parfaitement rangés. Pour ce faire, ils ont fait appel à des méthodes p -adiques, où l'on considère les objets arithmétiques à des multiples près des puissances successives d'un nombre premier p (par exemple 13, 13^2 , 13^3 et ainsi de suite). Or les nombres ainsi obtenus obéissent à une structure fractale : ils se répètent selon des motifs presque identiques à différentes échelles, comme les branches successives d'un cristal de glace. Ce résultat montre que les nombres de partitions des entiers ne sont pas simplement une séquence aléatoire de nombres avec des symétries fortuites ici ou là. Au contraire, ces nombres ont « une structure interne d'une grande beauté », explique K. Ono, qui les rend prévisibles et bien plus fascinants à étudier.

Il fallut plusieurs mois à K. Ono, Z. Kent et leur collaboratrice Amanda Folsom de

Formes modulaires et fonctions thêta

Les formes modulaires et les fonctions thêta sont des fonctions de variables complexes vérifiant certaines relations fonctionnelles ; elles incarnent de multiples phénomènes liés à la géométrie algébrique, l'arithmétique et la théorie des groupes.

Plusieurs des grands noms du XIX^e siècle leur sont associés : Gotthold Eisenstein, Carl Gustav Jacobi, Henri Poincaré, Bernhard Riemann... De nos jours, ces fonctions et leurs généralisations interviennent dans la théorie des représentations des groupes, des courbes elliptiques et des variétés abéliennes, domaines importants des mathématiques du XX^e siècle.

Notons $\sum_{n \geq 0}$ l'opération de somme sur tous les entiers n positifs ou nuls. Une forme modulaire en la variable complexe z peut être vue comme une série infinie $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n$ où $q = e^{2\pi i z}$, convergente quand la partie imaginaire de z est strictement positive (donc pour $|q| < 1$), et qui, principalement, obéit à l'équation fonctionnelle :

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z),$$

pour des entiers a, b, c, d vérifiant $ad - bc = 1$ et des propriétés de congruence telles que, par exemple, « N divise c ». L'entier N est le « niveau » et k est le « poids » de la forme modulaire. Les formes modulaires de poids 2 ont joué un rôle fondamental dans la preuve par Andrew Wiles du grand théorème de Fermat, en 1994 (théorème selon lequel il n'existe pas d'entiers positifs x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$, dès que l'entier n est supérieur à 2).

Le lien des formes modulaires avec les courbes elliptiques peut être illustré avec l'exemple de la courbe $y^2 - y = x^3 - x$.

Pour tout nombre premier p , notons N_p le nombre de solutions de cette équation modulo p (c'est-à-dire à un multiple de p près) et posons :

$a(p) = p - N_p$. Étendons la suite des $a(p)$ à tous les entiers positifs

(premiers ou non) par les règles $a(p^m) - a(p)a(p^{m-1}) + pa(p^{m-2}) = 0$ et $a(nm) = a(n)a(m)$ pour n et m premiers entre eux. Alors d'après un cas particulier du théorème de A. Wiles, la fonction $f = \sum a(n)q^n$ est une forme modulaire de poids 2 et de niveau 37.

Quant aux fonctions thêta, la fonction typique est la fonction de deux variables suivante :

$$\theta(u, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} t^n$$



REPRÉSENTATION DE LA partie réelle d'une fonction modulaire liée aux « fonctions elliptiques de Weierstrass », sur le disque $|q| < 1$ (nombres complexes q dont le module est inférieur à 1). Les régions où la partie réelle de la fonction est nulle sont en noir (les valeurs sont croissantes du bleu-vert au jaune-rouge).

avec $q = e^{2\pi i z}$ et $t = e^{2\pi i u}$ et où $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ désigne la somme sur tous les entiers relatifs n (négatifs et positifs).

En tant que fonction de u , la fonction θ vérifie : $\theta(u + az + b) = e(z, u) \theta(u, z)$, où $e(z, u)$ est un facteur non nul ayant une expression simple.

En prenant $u = 0$, la fonction $\theta_0(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}$ est une forme modulaire « tordue » de poids 1/2 ; elle vérifie notamment :

$$\theta_0(-1/z) = \alpha z^{1/2} \theta_0(z)$$

où $\alpha = e^{-i\pi/4}$.

Les fonctions thêta recèlent une foule d'informations arithmétiques. On a par exemple remarqué que $\theta_0^4(z) = 1 + \sum_{n > 1} r(n)q^n$ où $r(n)$ est le nombre de représentations de l'entier n comme somme de quatre carrés d'entiers ; cela a permis à Jacobi de démontrer que $r(n)$ est égal à huit fois la somme des diviseurs de n si n est impair, et à 24 fois la somme des diviseurs impairs de n si n est pair.

– Marc Hindry
Institut de mathématiques
de Jussieu – Paris Rive Gauche