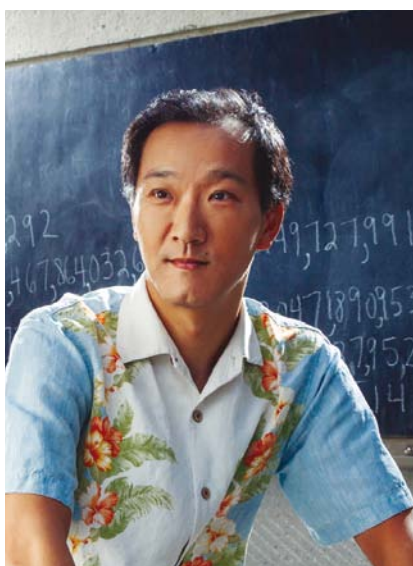


l'Université Yale pour démêler tous les fils de leur nouvelle théorie. Mais ils réussirent à prouver que les congruences des nombres de partitions apparaissent de façon calculable. Il en existe pour tous les nombres premiers et leurs puissances. Mais au-delà de 11, les motifs deviennent beaucoup plus complexes, ce qui explique probablement pourquoi Ramanujan ne les a jamais déterminées. K. Ono et ses collègues présentèrent leurs résultats à un symposium spécialement organisé à l'Université Emory en 2011.

De puissants outils

L'exploration des intuitions de Ramanujan a conduit K. Ono à d'autres développements qui pourraient un jour trouver une utilité hors des mathématiques. En mêlant la préscience de Ramanujan avec les mathématiques actuelles, K. Ono et ses collègues ont mis au point de puissants outils de calcul, utiles en mathématiques pures, mais qui pourraient aussi déboucher sur de meilleures méthodes de cryptage des données informatiques et aider à étudier les trous noirs.

En collaboration avec Jan Bruinier, de l'Université technique de Darmstadt en



3. LES TRAVAUX DE KEN ONO, mathématicien à l'Université Emory, à Atlanta aux États-Unis, confirment et généralisent certains des résultats figurant dans les notes de Ramanujan.

Allemagne, K. Ono a établi une formule permettant de calculer rapidement et avec précision les nombres de partitions des grands entiers, le graal que Ramanujan n'avait jamais atteint. K. Ono surnomme sa formule « l'Oracle ». En plus de calculer les nombres de partitions, dit-il, elle pourrait servir à étudier certains types de « courbes elliptiques » – des objets géométriques définis par une certaine classe d'équations polynomiales et qui sont dotées de remarquables propriétés arithmétiques.

Les cryptographes utilisent les courbes elliptiques pour réaliser certains algorithmes de cryptage. Le succès d'un tel algorithme repose sur la capacité de ce dernier à engendrer, pour qui veut décrypter le message codé, un problème mathématique impossible à résoudre en un temps raisonnable. Par exemple, un algorithme de cryptage répandu nommé RSA repose sur la difficulté à décomposer un très grand nombre en ses facteurs premiers. Des méthodes plus récentes font appel à des points sur une courbe elliptique, dont les relations sont encore plus difficiles à déchiffrer. Si l'Oracle ou les découvertes associées peuvent éclairer d'autres propriétés plus insaisissables, les cryptographes pourraient potentiellement les exploiter pour concevoir des systèmes de cryptage plus robustes.

Les travaux de K. Ono ont également dévoilé l'un des plus grands mystères de l'héritage mathématique de Ramanujan. Trois mois avant de mourir, cloué au lit par la fièvre et la douleur, le mathématicien indien écrivit à la hâte une dernière missive à Hardy. « Je suis tout à fait désolé de ne pas t'avoir écrit une seule lettre jusqu'à maintenant », s'excusait-il. « J'ai récemment découvert des fonctions très intéressantes que j'appelle "fausses" fonctions thêta [...]. Elles s'inscrivent dans les mathématiques aussi élégamment que les fonctions thêta ordinaires ».

Les fonctions thêta sont essentiellement des formes modulaires (voir l'encadré page 53). Ramanujan supposait qu'il est possible de décrire de nouvelles fonctions (les fausses fonctions thêta, ou fonctions mock-thêta, le terme anglais *mock* signifiant faux) qui ne ressemblent en rien à des formes modulaires et qui pourtant se comportent de la même façon en des points particuliers nommés singularités. À l'approche de ces points, la valeur prise par

Généraliser les identités de Rogers-Ramanujan

La lettre adressée par Ramanujan à G. H. Hardy en 1913 incluait deux identités, initialement découvertes en 1894 par le mathématicien britannique Leonard James Rogers, et désormais connues sous le nom d'identités de Rogers-Ramanujan. Elles portent sur deux séries infinies, notées $G(q)$ et $H(q)$, et les identifient à des produits infinis :

$$G(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q) \dots (1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})}$$

$$H(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(1-q) \dots (1-q^n)} = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})}$$

Ces identités sont utilisées aujourd'hui dans plusieurs domaines des mathématiques et de la physique théorique. La lettre de Ramanujan contenait une troisième formule montrant que leur quotient $H(q)/G(q)$ a des

propriétés remarquables. Notamment, selon les valeurs de q , ce quotient donne aisément des nombres algébriques (nombres qui sont solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers, comme le nombre

d'or $(1 + \sqrt{5})/2$, qui est la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$).

Ces formules de Ramanujan ont longtemps intrigué les mathématiciens, qui s'interrogeaient sur leur origine et les raisons profondes de leur validité. Tout récemment, Ole Warnaar, de l'Université du Queensland en Australie, en collaboration avec K. Ono et Michael Griffin de l'Université Emory, ont découvert que ces identités constituent des cas particuliers d'une famille infinie d'identités de nature et de propriétés similaires, ce qui permet d'intégrer les identités de Rogers-Ramanujan dans un cadre théorique plus vaste.

une fonction croît jusqu'à l'infini. Considérons par exemple la fonction $f(x) = 1/x$, qui présente une singularité en $x = 0$. À mesure que la variable x se rapproche de 0, la valeur de $f(x)$ devient infiniment grande. Les formes modulaires ont un nombre infini de singularités. Ramanujan a eu l'intuition que pour chacune de ces fonctions, il existe une fausse fonction thêta associée qui non seulement a les mêmes singularités, mais aussi tend vers l'infini presque de la même façon en ces points.

C'est seulement en 2002 qu'un mathématicien hollandais, Sander Zwegers, a formellement défini les fausses fonctions thêta, en utilisant des idées formulées des décennies après la mort de Ramanujan. Mais les mathématiciens ne parvenaient toujours pas à expliquer l'affirmation de Ramanujan selon laquelle ces fonctions imitent les formes modulaires au niveau de leurs singularités.

La machinerie sous-jacente à l'Oracle de K. Ono et J. Bruinier allait finalement résoudre l'énigme. Avec A. Folsom et Robert Rhoades, de l'Université Stanford, K. Ono

l'a utilisée afin de dériver des formules permettant de calculer les valeurs des fausses fonctions thêta au voisinage des singularités. Et effectivement, ils ont trouvé que la conjecture de Ramanujan est correcte : à proximité des singularités, les fausses fonctions thêta ressemblent étonnamment aux formes modulaires. Dans un cas, par exemple, les mathématiciens trouvent que la différence entre les valeurs des deux

KEN ONO ET SES COLLÈGUES

ont trouvé que la conjecture de Ramanujan est correcte : à proximité des singularités, les fausses fonctions thêta ressemblent étonnamment aux formes modulaires.

fonctions se rapproche fortement de 4 quand on tend vers la singularité, ce qui est presque négligeable dans cet univers de nombres infinis.

Les physiciens ont récemment commencé à utiliser les fausses fonctions thêta pour étudier l'entropie des trous noirs, l'entropie étant une grandeur de nature thermodynamique qui mesure le désordre d'un système ou la quantité d'information

qu'il représente. Certains scientifiques pensent que des formules apparentées à celles de K. Ono leur permettront peut-être de sonder ces phénomènes avec une meilleure précision.

K. Ono se rappelle encore le plaisir enivrant qu'il ressentit en voyant pour la première fois les congruences de Ramanujan, tandis que son père en traçait de son écriture régulière les symboles étranges sur son bloc-notes jaune. « Pour-quoi seulement trois ? », avait-il demandé. « Personne ne le sait », lui avait répondu son père.

En racontant cette histoire, K. Ono est assis dans la salle à manger de son domicile, en Géorgie. Le mur derrière lui porte une photographie du buste en bronze de Ramanujan qui a été commissionné pour sa veuve grâce à des dons de 25 dollars, de son père et de centaines d'autres mathématiciens et scientifiques du monde entier. « Jamais dans mes rêves les plus fous je n'aurais imaginé être en situation de dire un jour : "Tu sais quoi, Papa ? Ces congruences ne sont pas les seules – loin de là." » ■

Pour contribuer à la transmission de la culture mathématique, **LE MAGAZINE TANGENTE ORGANISE**

LES TROPHEES
tangente

DÉPÔT DES CANDIDATURES
AVANT LE 31 AOÛT 2014 MINUIT

Prix Bernard-Novelli

Soutenir les jeunes créateurs

Vous êtes collégiens, lycéens ?
Vous aimez concevoir des jeux logiques
faisant intervenir les mathématiques ?
Participez à ce concours
et transformez votre projet
en un produit mobile disponible
sur l'App Store et Google Play



Prix Tangente du meilleur article

Raconter les mathématiques

Envoyez-nous un article inédit vulgarisant un concept mathématique.
Le meilleur sera publié au sein du magazine Tangente

Prix Tangente du livre

Donner envie d'en savoir plus

A partir du 15 juin, participez
à la sélection des ouvrages
en votant sur :
www.tropheestangente.com

POUR LA SCIENCE

Inscription, informations et modalités de participation sur le site

www.tropheestangente.com