

une fonction croît jusqu'à l'infini. Considérons par exemple la fonction $f(x) = 1/x$, qui présente une singularité en $x = 0$. À mesure que la variable x se rapproche de 0, la valeur de $f(x)$ devient infiniment grande. Les formes modulaires ont un nombre infini de singularités. Ramanujan a eu l'intuition que pour chacune de ces fonctions, il existe une fausse fonction thêta associée qui non seulement a les mêmes singularités, mais aussi tend vers l'infini presque de la même façon en ces points.

C'est seulement en 2002 qu'un mathématicien hollandais, Sander Zwegers, a formellement défini les fausses fonctions thêta, en utilisant des idées formulées des décennies après la mort de Ramanujan. Mais les mathématiciens ne parvenaient toujours pas à expliquer l'affirmation de Ramanujan selon laquelle ces fonctions imitent les formes modulaires au niveau de leurs singularités.

La machinerie sous-jacente à l'Oracle de K. Ono et J. Bruinier allait finalement résoudre l'énigme. Avec A. Folsom et Robert Rhoades, de l'Université Stanford, K. Ono

l'a utilisée afin de dériver des formules permettant de calculer les valeurs des fausses fonctions thêta au voisinage des singularités. Et effectivement, ils ont trouvé que la conjecture de Ramanujan est correcte : à proximité des singularités, les fausses fonctions thêta ressemblent étonnamment aux formes modulaires. Dans un cas, par exemple, les mathématiciens trouvent que la différence entre les valeurs des deux

KEN ONO ET SES COLLÈGUES

ont trouvé que la conjecture de Ramanujan est correcte : à proximité des singularités, les fausses fonctions thêta ressemblent étonnamment aux formes modulaires.

fonctions se rapproche fortement de 4 quand on tend vers la singularité, ce qui est presque négligeable dans cet univers de nombres infinis.

Les physiciens ont récemment commencé à utiliser les fausses fonctions thêta pour étudier l'entropie des trous noirs, l'entropie étant une grandeur de nature thermodynamique qui mesure le désordre d'un système ou la quantité d'information

qu'il représente. Certains scientifiques pensent que des formules apparentées à celles de K. Ono leur permettront peut-être de sonder ces phénomènes avec une meilleure précision.

K. Ono se rappelle encore le plaisir enivrant qu'il ressentit en voyant pour la première fois les congruences de Ramanujan, tandis que son père en traçait de son écriture régulière les symboles étranges sur son bloc-notes jaune. « Pour-quoi seulement trois ? », avait-il demandé. « Personne ne le sait », lui avait répondu son père.

En racontant cette histoire, K. Ono est assis dans la salle à manger de son domicile, en Géorgie.

Le mur derrière lui porte une photographie du buste en bronze de Ramanujan qui a été commissionné pour sa veuve grâce à des dons de 25 dollars, de son père et de centaines d'autres mathématiciens et scientifiques du monde entier. « Jamais dans mes rêves les plus fous je n'aurais imaginé être en situation de dire un jour : "Tu sais quoi, Papa ? Ces congruences ne sont pas les seules – loin de là." » ■

Pour contribuer à la transmission
de la culture mathématique,
LE MAGAZINE TANGENTE ORGANISE

LES TROPHEES tangente

**DÉPÔT DES CANDIDATURES
AVANT LE 31 AOÛT 2014 MINUIT**

Prix Bernard-Novelli

Soutenir les jeunes créateurs
Vous êtes collégiens, lycéens ?
Vous aimez concevoir des jeux logiques
faisant intervenir les mathématiques ?
Participez à ce concours
et transformez votre projet
en un produit mobile disponible
sur l'App Store et Google Play



Prix Tangente du livre

Donner envie d'en savoir plus
A partir du 15 juin, participez
à la sélection des ouvrages
en votant sur :
www.tropheestangente.com

Prix Tangente du meilleur article

Raconter les mathématiques
Envoyez-nous un article inédit vulgarisant un concept mathématique.
Le meilleur sera publié au sein du magazine Tangente

**POUR LA
SCIENCE**

Inscription, informations et modalités de participation sur le site
www.tropheestangente.com

Le principe d'équivalence à l'épreuve quantique

Domenico Giulini

L'égalité entre la masse qui mesure l'inertie et la masse qui détermine la gravitation est au fondement de la relativité générale d'Einstein. Une expérience récente censée la tester sur des objets quantiques divise les spécialistes.

Dans le vide, une plume et une boule de pétanque tombent de la même façon et aussi vite... du moins en apparence, c'est-à-dire dans la limite des incertitudes de mesure. Pour valider expérimentalement le principe de la chute identique de corps différents, encore faut-il disposer d'une théorie dont les hypothèses fondamentales sont formulées de façon claire et complète, et reliées par des chaînes logiques à des prédictions testables.

Il n'est pas sûr que ce soit le cas. Les deux grands pans de la physique fondamentale que sont la théorie de la relativité générale d'Einstein et la théorie quantique soulèvent des problèmes d'interprétation quand on tente de tester la première à l'aide d'une expérience faisant intervenir la seconde. Une telle difficulté est apparue lorsque des physiciens ont testé le « principe d'équivalence », un fondement de la relativité générale, au moyen d'une expérience mettant en jeu la théorie quantique. Nous verrons qu'elle oppose l'équipe de Claude Cohen-Tannoudji, en France, et celle de Steven Chu, aux États-Unis, deux colauréats du prix Nobel de physique de 1997.

Plusieurs théories physiques actuelles passent pour fondamentales. Cela signifie que chacune décrit une grande gamme de phénomènes dans les limites de la précision de mesure ; qu'elle est applicable de façon universelle ; qu'elle ne se contredit pas dans ses conséquences. La relativité générale et la théorie quantique sont de telles théories, et elles ont résisté jusqu'ici à tous les tests expérimentaux.

Les grandes constantes fondamentales

Des constantes dites fondamentales leur sont attachées. Il s'agit de la vitesse de la lumière c et de la constante gravitationnelle G dans le cas de la relativité générale, et de la constante de Planck h dans le cas de la théorie quantique. La dimension (au sens physique de la longueur, de la masse, du temps) de la vitesse de la lumière est une longueur divisée par un temps. Celle de la constante gravitationnelle est plus compliquée et découle de la loi d'attraction universelle de Newton ($F = Gmm'/r^2$). Quant à la constante de Planck h , elle a la dimension d'une action – c'est-à-dire du

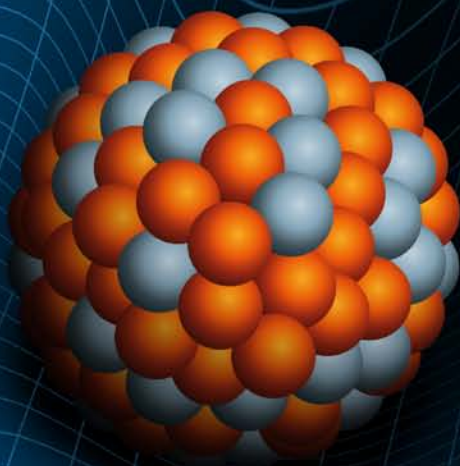
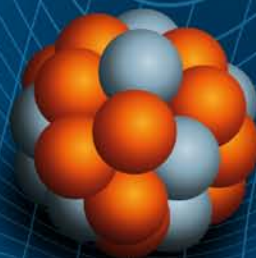
produit d'une énergie par un temps – et pour cette raison, on la nomme aussi le quantum d'action.

Du point de vue de leur dimension, ces trois constantes fondamentales combinent des unités de longueur, de temps ou de masse. Inversement, on peut les combiner pour former un système d'unités – les « unités de Planck » : la longueur de Planck, la masse de Planck, le temps de Planck (voir l'encadré page 59). Ces unités indiquent, grossièrement, à quelles échelles d'espace-temps et de masse (ou d'énergie) la théorie quantique et celle de la relativité générale devraient se rejoindre. Dans ces situations, les phénomènes physiques sont censés ne plus pouvoir être décrits que dans le cadre d'une théorie quantique de la gravitation, dont la mise au point se fait attendre.

D'ordinaire, les effets gravitationnels et les effets quantiques se manifestent à des échelles très différentes, de sorte que les mesurer simultanément exige des précisions énormes. Les échelles indiquées par les unités de Planck sont si petites qu'il semble exclu de pouvoir s'en approcher expérimentalement. Ainsi, il y a autant d'ordres de grandeur (des puissances de 10) entre

1. L'ESPACE-TEMPS QUADRIDIMENSIONNEL

de la relativité générale d'Einstein est comparable, en trois dimensions [deux d'espace, une de temps], à un tissu élastique que des masses courberaient, façonnant ainsi l'espace où évoluent les masses voisines. Mais les lois de la relativité générale s'appliquent-elles encore à l'échelle des atomes [ici des noyaux atomiques] ?



L'ESSENTIEL

■ **Le principe d'équivalence**, l'un des fondements de la théorie de la relativité générale, stipule que la masse gravitationnelle et la masse inertielle sont identiques.

■ Des physiciens ont entrepris de tester la validité de ce principe sur des atomes, donc à l'échelle d'un système quantique.

■ Ces travaux soulèvent de délicates questions d'interprétation, mais pourraient éclairer les liens entre la gravitation et la théorie quantique.

Pour la Science