

LOGIQUE & CALCUL

Un tour de cartes mathémagique

*Pour réussir un bon tour de cartes, il faut être agile de ses mains...
ou alors connaître les suites de de Bruijn.*

Jean-Paul DELAHAYE

Le magicien sort un jeu de 32 cartes et le donne à un spectateur qui l'examine et n'y repère aucune anomalie : le jeu n'est pas composé de cartes identiques et n'est pas rangé selon un ordre évident. En y regardant de près, le spectateur s'assure même que toutes les cartes sont différentes et constituent un jeu complet. Le magicien demande au spectateur de couper le jeu, de prendre la carte du dessus, puis de passer le jeu à son voisin de droite, qui prend la carte du dessus et passe le jeu à son voisin de droite, etc. Quand cinq cartes ont ainsi été retirées, le jeu est posé sur une table et personne n'y touche plus. Le magicien indique qu'il va se livrer à un numéro de transmission de pensée multiple. Il demande aux cinq spectateurs de se concentrer intensément sur la carte qu'ils ont en main et qu'ils n'ont montrée à personne. Il va deviner les cinq cartes.

Le magicien ferme les yeux et se concentre. Au bout de quelques secondes, il semble gêné : « Je n'y arrive pas, vos flux mentaux se mélangent. Nous allons décomposer la transmission de pensée. Occupons-nous des cartes noires (pique ou trèfle). Les personnes parmi vous qui en ont se lèvent et se concentrent à nouveau sur la carte devant leurs yeux ». Le premier et le troisième spectateur se lèvent et tentent de transmettre mentalement l'image de leur carte.

Au bout de dix secondes, le magicien annonce : « C'est bon. Monsieur, vous avez le 10 de pique et vous, vous avez l'as de trèfle.

Maintenant je peux d'ailleurs déchiffrer le premier flux que j'ai reçu tout à l'heure, les trois autres cartes sont l'as de cœur, le 8 de carreau et le 9 de cœur ». Tout est exact ! Les cinq cartes choisies que les spectateurs montrent au public sont effectivement : 10♠, a♥, a♣, 8♦, 9♥.

Bien sûr, il n'y a pas de transmission de pensée. Le tour est purement mathématique. Voyez-vous l'astuce ?

Les suites de Nicolaas de Bruijn

La solution se trouve dans une notion étudiée par le mathématicien néerlandais Nicolaas Govert de Bruijn (Dick de Bruijn), né en 1918 et décédé en 2012. Ses travaux de recherche ont porté sur la théorie des graphes, l'analyse, la théorie des pavages apériodiques, les méthodes de démonstration automatique de théorèmes et les suites de nombres nommées aujourd'hui « suites de de Bruijn » qui donnent la solution du joli tour de cartes présenté ci-dessus.

L'importance mathématique et pratique de ces suites et des graphes associés va cependant bien au-delà de la prestidigitation, puisque ces notions jouent un rôle en bio-informatique où elles aident à recoller les nombreux petits bouts de séquences génétiques que les séquenceurs d'ADN produisent en désordre.

Réfléchissons au tour avec les cinq spectateurs. Vous avez noté qu'à aucun moment, le

jeu de cartes n'a été mélangé. Il est seulement examiné, puis coupé par le premier spectateur. Les cinq spectateurs ne choisissent pas cinq cartes indépendamment, mais cinq cartes consécutives déterminées par la coupe du premier spectateur, qui est bien sûr inconnue.

La mise en scène du tour conduit le magicien à connaître qui des cinq spectateurs possèdent des cartes noires et rouges. Il se pourrait qu'il n'y ait aucun joueur ayant une carte noire, il se pourrait qu'il y en ait un, ou deux, etc. Le magicien n'apprend pas seulement leur nombre, il apprend précisément lesquels des spectateurs ont des cartes noires et lesquels ont des cartes rouges. En tout, il y a 32 possibilités : le premier joueur peut avoir une rouge ou une noire (2 cas), de même que le second (2 cas), etc., ce qui donne $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ cas différents possibles. En voici la liste :

NNNNN-NNNNR-NNNRN-NNNRN-NNRNN-
NNRNR-NNRRN-NNRRR-NNRRN-NNRRN-
NNRRN-NNRRR-NNRRN-NNRRN-NNRRN-
NNRRR-NNRRN-NNRRN-NNRRN-NNRRR-
NNRRN-NNRRN-NNRRN-NNRRR-NNRRN-
NNRRN-NNRRN-NNRRR-NNRRN-NNRRN-
NNRRR-NNRRN-NNRRR-NNRRN-NNRRN-
NNRRR-NNRRR

Grâce à son petit baratin, le magicien sait lequel de ces 32 quintuplets est le bon (*souligné ci-dessus*). Le jeu de 32 cartes utilisé a été préparé dans un ordre particulier (nous y reviendrons) et il y a 32 façons de couper un jeu de 32 cartes. Le magicien ignore la coupe faite et c'est l'information qu'il doit retrouver. En résumé, le magicien reçoit durant le tour

Voici une solution à ce problème : **RRRRR-NRRNRNNRRNNNNRRRNNRRNNNRN**. Une telle suite de 32 symboles est nommée suite de de Bruijn d'ordre 5 ; en trouver et les étudier est exactement le problème auquel s'est intéressé en 1946 Nicolaas de Bruijn en résolvant une conjecture soumise quelque temps auparavant par un autre mathématicien.

Avec un jeu de 2^n cartes

Avant de voir comment la suite de 32 N et R a été obtenue, terminons l'explication pratique du tour. En exploitant la suite des

1. Le tableau du magicien

Si vous classez un jeu de 32 cartes dans l'ordre 8♦ 9♥ r♥ 7♥ 10♦ v♠ d♥ 9♦ v♠ v♥ 9♠ 7♣ d♦ 10♥ 9♠ r♣ d♣ r♠ 10♣ r♦ 8♥ a♦ 8♠ d♠ 7♦ 7♠ a♠ 8♠ v♦ 10♠ a♥ a♠, alors la seule connaissance de la couleur (noir ou rouge) de cinq cartes consécutives vous permet de savoir quelles sont ces cartes. C'est la clé du tour présenté dans l'article.

Le tableau ci-dessous permet la réalisation pratique du tour. En fonction du quintuplet de N ou R (les 32 possibilités sont indiquées dans la colonne de gauche), il vous indique les cinq cartes dont il s'agit.

NNNNN	9♠	r♣	d♣	r♠	10♣
NNNNR	r♣	d♣	r♠	10♣	r♦
NNNRN	7♠	a♠	8♣	v♦	10♠
NNNRR	d♣	r♠	10♣	r♦	8♥
NNRNN	8♠	d♠	7♦	7♠	a♠
NNRNR	a♠	8♣	v♦	10♠	a♥
NNRRN	9♣	7♣	d♦	10♥	9♠
NNRRR	r♠	10♣	r♦	8♥	a♦
NRNNN	d♠	7♦	7♠	a♠	8♣
NRNNR	v♠	v♥	9♣	7♣	d♦
NRNRN	8♣	v♦	10♠	a♥	a♣
NRNRR	10♠	a♥	a♣	8♦	9♥
NRRNN	7♣	d♦	10♥	9♠	r♣
NRRNR	v♣	d♥	9♦	v♠	v♥
NRRRN	10♣	r♦	8♥	a♦	8♠
NRRRR	a♣	8♦	9♥	r♥	7♥
RNNNN	10♥	9♠	r♣	d♣	r♠
RNNNR	7♦	7♠	a♠	8♣	v♦
RNNRN	a♦	8♠	d♠	7♦	7♠
RNNRR	v♥	9♣	7♣	d♦	10♥
RRNNN	9♦	v♠	v♥	9♣	7♣
RRNRN	v♦	10♠	a♥	a♣	8♦
RRNRN	10♦	v♣	d♥	9♦	v♠
RRRRR	a♥	a♣	8♦	9♥	r♥
RRNNN	d♦	10♥	9♠	r♣	d♣
RRNNR	8♥	a♦	8♠	d♠	7♦
RRNRN	d♥	9♦	v♠	v♥	9♣
RRNRR	7♥	10♦	v♣	d♥	9♦
RRRNN	r♦	8♥	a♦	8♠	d♠
RRRNR	r♥	7♥	10♦	v♣	d♥
RRRRN	9♥	r♥	7♥	10♦	v♣
RRRRR	8♦	9♥	r♥	7♥	10♦