

une information équivalente à celle du choix d'un élément parmi 32 (cela correspond à 5 bits d'information), qui est exactement l'information dont il a besoin pour savoir où la coupe a été faite par le premier spectateur.

En termes de quantités d'information, il n'y a aucun miracle : il lui manquait 5 bits d'information (l'emplacement de la coupe), il en a reçu 5. Reste à savoir comment s'y prendre pour que les cinq bits reçus indiquent l'endroit où la coupe a été faite. Le problème est de trouver un ordre pour les 32 cartes tel qu'à partir de la connaissance de la couleur (noire ou rouge) de cinq cartes consécutives, le magicien sache toujours quelles sont ces cinq cartes, c'est-à-dire l'endroit où a été opérée la coupe du premier spectateur.

La question est équivalente à celle-ci : trouver une suite de 32 symboles N ou R comportant 16 N et 16 R et telle que les 32 façons de prendre cinq éléments consécutifs de la suite soient toutes différentes et correspondent aux 32 façons de composer une suite de cinq symboles N ou R. Notez bien qu'ici, quand on parle de cartes successives, on convient implicitement qu'après la dernière carte du paquet, on revient à la première : les cartes 30, 31, 32, 1, 2 sont donc pour nous cinq cartes consécutives.

Voici une solution à ce problème : **RRRRR-NRRRNRRNRRNNNNRRRRNRRNNRRN**. Une telle suite de 32 symboles est nommée suite de de Bruijn d'ordre 5 ; en trouver et les étudier est exactement le problème auquel s'est intéressé en 1946 Nicolaas de Bruijn en résolvant une conjecture soumise quelque temps auparavant par un autre mathématicien.

Avec un jeu de 2ⁿ cartes

Nous verrons plus loin comment trouver de telles suites. Nous envisagerons le cas général où, à la place de cinq spectateurs, il y en a n et où la taille du jeu de cartes est 2^n .

Vérifiez que la suite proposée ci-dessus est bonne : en en prenant 5 symboles consécutifs (il y a 32 façons de le faire), on retrouve les 32 quintuplets énumérés auparavant, chacun une fois exactement.

Avant de voir comment la suite de 32 N et R a été obtenue, terminons l'explication pratique du tour. En exploitant la suite des

1. Le tableau du magicien

Si vous classez un jeu de 32 cartes dans l'ordre **8♦ 9♥ r♥ 7♥ 10♦ v♣ d♥ 9♦ v♠ v♥ 9♣ 7♣ d♦ 10♥ 9♠ r♣ d♣ r♠ 10♣ r♦ 8♥ a♦ 8♠ d♠ 7♦ 7♠ a♠ 8♣ v♦ 10♠ a♥ a♠**, alors la seule connaissance de la couleur (noir ou rouge) de cinq cartes consécutives vous permet de savoir quelles sont ces cartes. C'est la clé du tour présenté dans l'article.

Le tableau ci-dessous permet la réalisation pratique du tour. En fonction du quintuplet de N ou R (les 32 possibilités sont indiquées dans la colonne de gauche), il vous indique les cinq cartes dont il s'agit.

NNNNN	9♠	r♣	d♣	r♠	10♣
NNNNR	r♣	d♣	r♠	10♣	r♦
NNNRN	7♠	a♠	8♣	v♦	10♠
NNNRR	d♣	r♠	10♣	r♦	8♥
NNRNN	8♠	d♠	7♦	7♠	a♠
NNRNR	a♠	8♣	v♦	10♠	a♥
NNRRN	9♣	7♠	d♦	10♥	9♠
NNRRR	r♠	10♣	r♦	8♥	a♦
NRNNN	d♠	7♦	7♠	a♠	8♣
NRNNR	v♠	v♥	9♣	7♠	d♦
NRNRN	8♣	v♦	10♠	a♥	a♠
NRNRR	10♠	a♥	a♠	8♦	9♥
NRRNN	7♠	d♦	10♥	9♠	r♠
NRRNR	v♠	d♥	9♦	v♠	v♥
NRRRN	10♣	r♦	8♥	a♦	8♠
NRRRR	a♠	8♦	9♥	r♥	7♥
RNNNN	10♥	9♠	r♠	d♣	r♠
RNNNR	7♦	7♠	a♠	8♣	v♦
RNNRN	a♦	8♠	d♠	7♦	7♠
RNNRR	v♥	9♣	7♠	d♦	10♥
RNRNN	9♦	v♠	v♥	9♠	7♠
RNRNR	v♦	10♠	a♥	a♠	8♦
RNRRR	10♦	v♠	d♥	9♦	v♠
RRNNN	a♥	a♠	8♦	9♥	r♥
RRNNR	d♦	10♥	9♠	r♠	d♣
RRNNR	8♥	a♦	8♠	d♠	7♦
RRNRN	d♥	9♦	v♠	v♥	9♠
RRNRR	7♥	10♦	v♠	d♥	9♦
RRRNN	r♦	8♥	a♦	8♠	d♠
RRRNR	r♥	7♥	10♦	v♠	d♥
RRRRN	9♥	r♥	7♥	10♦	v♠
RRRRR	8♦	9♥	r♥	7♥	10♦

2. Un algorithme calculant une suite de de Bruijn

La méthode des graphes de de Bruijn permet de trouver toutes les suites de de Bruijn et rend même possible leur décompte. Parfois cependant, on ne veut qu'une seule suite de de Bruijn. L'« algorithme gourmand » le permet. Nous l'expliquons pour $n = 4$. On part de la suite 0000, ensuite on ajoute un 1 si cela ne conduit pas à avoir un quadruplet déjà obtenu, sinon on ajoute un 0, et on recommence en n'ajoutant de 0 que lorsque c'est inévitable.

Départ :	0000
On ajoute un 1 :	00001
On ajoute un 1 :	000011
On ajoute un 1 :	0000111
On ajoute un 1 :	00001111
On ajoute un 0 :	000011110 (car ajouter un 1 donnerait le quadruplet 1111 déjà obtenu)
On ajoute un 1 :	0000111101
On ajoute un 1 :	00001111011
On ajoute un 0 :	000011110110 (car ajouter un 1 donnerait le quadruplet 0111 déjà obtenu)
On ajoute un 0 :	0000111101100 (car ajouter un 1 donnerait le quadruplet 1101 déjà obtenu)
On ajoute un 1 :	00001111011001
On ajoute un 0 :	000011110110010 (car ajouter un 1 donnerait le quadruplet 0011 déjà obtenu)
On ajoute un 0 :	0000111101100101

Ce qui donne la suite de de Bruijn d'ordre 4 :
0000111101100101

Que cette méthode fonctionne n'est en rien évident, mais c'est le cas (pour tout n), comme l'a démontré M. A. Martin en 1934.

32 symboles R ou N, on choisit un rangement des 32 cartes du jeu qui la respecte. Un grand nombre de classements conviendraient, mais on en prend un et on n'en change plus. Par exemple : 8♦ 9♥ r♥ 7♥ 10♦ v♣ d♥ 9♦ v♣ v♥ 9♣ 7♣ d♦ 10♥ 9♠ r♣ d♣ r♠ 10♣ r♦ 8♥ a♦ 8♠ d♠ 7♦ 7♠ a♠ 8♠ v♦ 10♠ a♥ a♠.

Selon l'endroit où le premier spectateur fait sa coupe, les cinq cartes qui viennent (et qui sont celles des cinq spectateurs) déterminent une suite de rouges et de noires qui permet au magicien de savoir où la coupe a été faite, et qui lui indique les cartes aux mains des spectateurs.

Traisons l'exemple utilisé pour présenter le tour. Les joueurs 1 et 3 avaient des cartes noires. La situation des cinq joueurs était donc NRNR. La seule coupe produisant cette série est celle qui amène le 10 de pique au-dessus : 10♠ a♥ a♠ 8♦ 9♥ r♥ 7♥ 10♦ v♣ d♥ 9♦ v♣ v♥ 9♣ 7♣ d♦ 10♥ 9♠ r♣ d♣ r♠ 10♣ r♦ 8♥ a♦ 8♠ d♠ 7♦ 7♠ a♠ 8♠ v♦. Les cinq cartes sont donc 10♠, a♥, a♠, 8♦, 9♥.

Sur un plan pratique, le magicien pourrait apprendre par cœur l'ordre des cartes qu'il a choisi et mentalement retrouver l'endroit de la coupe. Ce n'est pas très facile, aussi il

3. Graphes et suites de de Bruijn pour $n = 2, 3, 4, 5$

Les graphes de Nicolaas de Bruijn permettent de trouver des suites de longueur n donnant toutes les combinaisons possibles de n chiffres 0 ou 1 quand on déplace sur la suite une fenêtre de largeur n . De telles suites de 0 et de 1 sont nommées « suites de de Bruijn d'ordre n ».

Trouver ces suites est équivalent à rechercher des circuits eulériens sur un graphe, c'est-à-dire des chemins revenant à leur point de départ et passant par chaque arc du graphe une fois et une seule. De chaque sommet partent deux arcs et en arrivent deux. Cela assure que pour chaque n , un tel circuit eulérien est possible. Pour tout n , il existe donc des suites de de Bruijn.

Pour $n = 3$, le circuit eulérien 11-11-10-01-10-00-00-01 donne (en ne retenant que le premier bit de chaque paire) la suite de de Bruijn 11101000. Quand on déplace une

fenêtre de largeur 3 sur la suite (dont on suppose qu'elle se referme circulairement sur elle-même), on obtient tous les triplets possibles de 0 et de 1 :

11101000 → triplet 111 ; 11101000 → triplet 110
11101000 → triplet 101 ; 11101000 → triplet 010
11101000 → triplet 100 ; 11101000 → triplet 000
11101000 → triplet 001 ; 11101000 → triplet 011

Le graphe correspondant à cette suite est représenté dans le texte à la page suivante.

Voici une suite de de Bruijn d'ordre 4 : 0000110010111101.

En voici une d'ordre 5 (utilisée dans l'article pour le tour de magie et dont le circuit eulérien est représenté ci-contre) : 000001001011001111000110110101.

Et en voici une d'ordre 6 (dont le graphe n'est pas représenté) : 00000010001011111011101011000111100110010101010011100001101101.

