

2. Un algorithme calculant une suite de de Bruijn

La méthode des graphes de de Bruijn permet de trouver toutes les suites de de Bruijn et rend même possible leur décompte. Parfois cependant, on ne veut qu'une seule suite de de Bruijn. L'« algorithme gourmand » le permet. Nous l'expliquons pour $n = 4$. On part de la suite 0000, ensuite on ajoute un 1 si cela ne conduit pas à avoir un quadruplet déjà obtenu, sinon on ajoute un 0, et on recommence en n'ajoutant de 0 que lorsque c'est inévitable.

Départ : 0000
 On ajoute un 1 : 00001
 On ajoute un 1 : 000011
 On ajoute un 1 : 0000111
 On ajoute un 1 : 00001111
 On ajoute un 0 : 000011110 (car ajouter un 1 donnerait le quadruplet 1111 déjà obtenu)
 On ajoute un 1 : 0000111101
 On ajoute un 1 : 00001111011
 On ajoute un 0 : 000011110110 (car ajouter un 1 donnerait le quadruplet 0111 déjà obtenu)
 On ajoute un 0 : 0000111101100 (car ajouter un 1 donnerait le quadruplet 1101 déjà obtenu)
 On ajoute un 1 : 00001111011001
 On ajoute un 0 : 000011110110010 (car ajouter un 1 donnerait le quadruplet 0011 déjà obtenu)
 On ajoute un 0 : 0000111101100101
 Ce qui donne la suite de de Bruijn d'ordre 4 :
 0000111101100101

Que cette méthode fonctionne n'est en rien évident, mais c'est le cas (pour tout n), comme l'a démontré M. A. Martin en 1934.

32 symboles R ou N, on choisit un rangement des 32 cartes du jeu qui la respecte. Un grand nombre de classements conviendraient, mais on en prend un et on n'en change plus. Par exemple : 8♦ 9♥ r♥ 7♥ 10♦ v♠ d♥ 9♦ v♠ v♥ 9♣ 7♣ d♦ 10♥ 9♠ r♣ d♣ r♠ 10♣ r♦ 8♥ a♦ 8♠ d♠ 7♦ 7♠ a♠ 8♠ v♦ 10♠ a♥ a♠.

Selon l'endroit où le premier spectateur fait sa coupe, les cinq cartes qui viennent (et qui sont celles des cinq spectateurs) déterminent une suite de rouges et de noires qui permet au magicien de savoir où la coupe a été faite, et qui lui indique les cartes aux mains des spectateurs.

Traisons l'exemple utilisé pour présenter le tour. Les joueurs 1 et 3 avaient des cartes noires. La situation des cinq joueurs était donc NRNR. La seule coupe produisant cette série est celle qui amène le 10 de pique au-dessus : 10♠ a♥ a♠ 8♦ 9♥ r♥ 7♥ 10♦ v♠ d♥ 9♦ v♠ v♥ 9♣ 7♣ d♦ 10♥ 9♠ r♣ d♣ r♠ 10♣ r♦ 8♥ a♦ 8♠ d♠ 7♦ 7♠ a♠ 8♠ v♦. Les cinq cartes sont donc 10♠, a♥, a♠, 8♦, 9♥.

Sur un plan pratique, le magicien pourrait apprendre par cœur l'ordre des cartes qu'il a choisi et mentalement retrouver l'endroit de la coupe. Ce n'est pas très facile, aussi il

3. Graphes et suites de de Bruijn pour $n = 2, 3, 4, 5$

Les graphes de Nicolaas de Bruijn permettent de trouver des suites de longueur n donnant toutes les combinaisons possibles de n chiffres 0 ou 1 quand on déplace sur la suite une fenêtre de largeur n . De telles suites de 0 et de 1 sont nommées « suites de de Bruijn d'ordre n ».

Trouver ces suites est équivalent à rechercher des circuits eulériens sur un graphe, c'est-à-dire des chemins revenant à leur point de départ et passant par chaque arc du graphe une fois et une seule. De chaque sommet partent deux arcs et en arrivent deux. Cela assure que pour chaque n , un tel circuit eulérien est possible. Pour tout n , il existe donc des suites de de Bruijn.

Pour $n = 3$, le circuit eulérien 11-11-10-01-10-00-00-01 donne (en ne retenant que le premier bit de chaque paire) la suite de de Bruijn 11101000. Quand on déplace une

fenêtre de largeur 3 sur la suite (dont on suppose qu'elle se referme circulairement sur elle-même), on obtient tous les triplets possibles de 0 et de 1 :

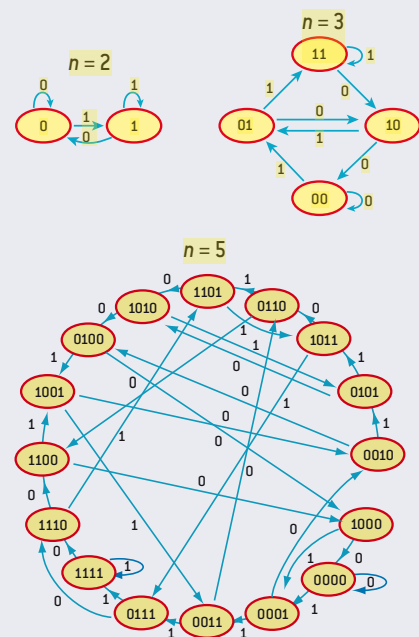
11101000 → triplet 111 ; 11101000 → triplet 110
 11101000 → triplet 101 ; 11101000 → triplet 010
 11101000 → triplet 100 ; 11101000 → triplet 000
 11101000 → triplet 001 ; 11101000 → triplet 011

Le graphe correspondant à cette suite est représenté dans le texte à la page suivante.

Voici une suite de de Bruijn d'ordre 4 : 0000110010111101.

En voici une d'ordre 5 (utilisée dans l'article pour le tour de magie et dont le circuit eulérien est représenté ci-contre) : 000001001010011111000101110101.

Et en voici une d'ordre 6 (dont le graphe n'est pas représenté) : 00000010001011111011101010001111001100100101010011100001101101.



4. Le problème des suites de de Bruijn en dimension 2

En dimension 2, le problème des suites de de Bruijn devient celui des tores de de Bruijn. Pour $n = 2$, il existe 16 carrés 2×2 composés de 0 et de 1 (a).

La question est : peut-on remplir de 0 et de 1 un carré 4×4 représentant la surface d'un tore (les bords haut et bas sont collés, les bords droit et gauche sont collés) de telle façon qu'en faisant glisser une

petite fenêtre carrée de taille 2×2 sur les 16 positions possibles qu'elle peut prendre, on trouve les 16 carrés 2×2 énumérés ci-dessous ? Une solution est figurée en b.

Si à la place de deux symboles, on en considère quatre, il y a cette fois $4^4 = 256$ carrés possibles de taille 2×2 , et on peut donc (au mieux) espérer utiliser la surface carrée d'un tore 16×16 pour énumérer

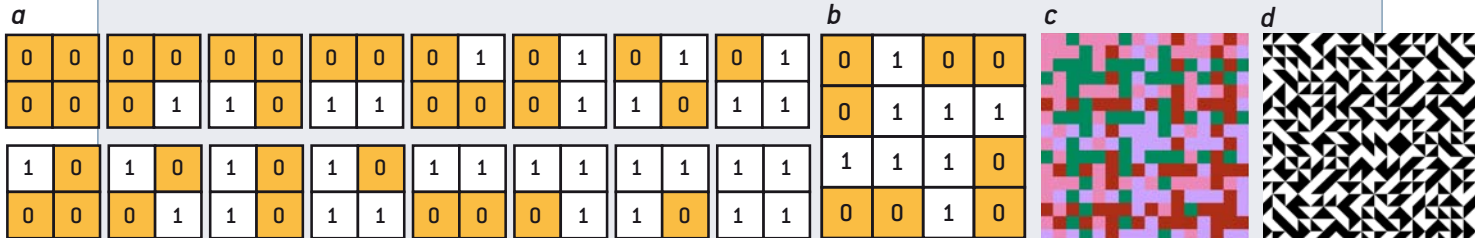
par fenêtre glissante tous les carrés possibles de taille 2×2 utilisant quatre symboles. Une solution, figurée en couleurs, est le schéma c.

Si, à la place de quatre couleurs, on utilise les quatre façons de colorier un carré en noir et blanc en le divisant par une diagonale, on obtient un intéressant tableau abstrait (d).

Un tel pavage de surface a un intérêt pratique. Un robot se

déplaçant à la surface d'une pièce où ce motif serait dessiné pourrait, en observant uniquement les quatre carrés placés sous lui et en utilisant une table convenable (comme le magicien avec son tableau caché), savoir où il se trouve précisément.

Pour d'autres informations sur cette variante du problème de de Bruijn, voir : <http://tiny.cc/9y96fx>



s'aidera d'un petit tableau (voir l'encadré 1) qui contient les réponses. Il le placera discrètement en un endroit où lui seul peut le voir, sur un petit carton qu'il a en main ou collé sur le revers de sa veste, ou sur un des objets utilisés pour son spectacle.

Un graphe pour tout comprendre

Reste une question : comment trouver les suites de Nicolaas de Bruijn ?

La suite utilisée est celle-ci :

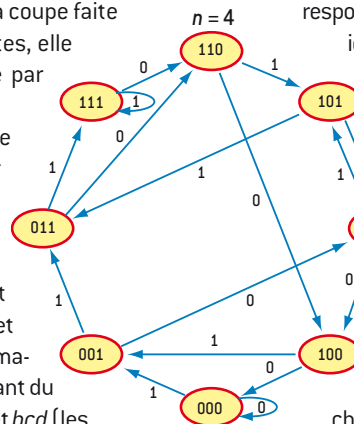
RRRRRNRNRNNRRNNNNNRNRNNNRNNRNRN.

Ramenons-nous à des bits d'information en remplaçant les N par des 1 et les R par des 0 : 00000100101100111110001101110101. Comment trouver une telle suite binaire, ou en trouver d'autres, permettant de généraliser le tour avec, par exemple, six spectateurs et un jeu de 64 cartes ?

L'idée repose sur une représentation en graphe du problème. Elle va nous conduire à une solution générale qui prouvera que les suites de de Bruijn existent pour tout ordre n . Il est plus simple d'expliquer la méthode avec

un jeu de seulement 16 cartes (on ne retient par exemple que les cœurs et les piques) et quatre spectateurs : les couleurs des cartes des quatre spectateurs dont prend connaissance le magicien fournissent maintenant 4 bits d'information au magicien ; cela lui permet de retrouver la coupe faite dans le jeu de 16 cartes, elle aussi est déterminée par 4 bits d'information.

Le graphe ci-contre permet de trouver toutes les suites de de Bruijn d'ordre 4. Il est composé de huit sommets qui sont les huit triplets possibles de 0 et de 1. On a tracé systématiquement un arc partant du triplet abc vers le triplet bcd (les deux derniers symboles de abc sont identiques aux deux premiers symboles de bcd). On a écrit d sur l'arc qui joint abc à bcd . Cette façon de dessiner le graphe assure que de chaque sommet partent exactement deux arcs, et que sur chaque sommet arrivent exactement deux arcs. Il y a en tout 16 arcs.



Si l'on considère un chemin suivant une série de flèches liées et passant d'un sommet à un autre, on construit une suite finie de 0 et de 1. Par exemple, en partant du sommet 110 en haut, on passe à 100, puis à 001, puis à 011, puis à 110. À un tel chemin, on fait correspondre une notation compactée, ici 1100110, obtenue en notant

les uns derrière les autres les noms des sommets, sans répéter les deux symboles communs à deux sommets consécutifs (en bleu) : 110-100-001-011-110 → 1100110.

Trouver une suite de de Bruijn d'ordre 4 consiste maintenant à trouver un chemin revenant à son point de départ (un « circuit ») qui passe par tous les arcs une fois et une fois seulement. Un tel circuit passe deux fois par chaque sommet du graphe, puisque de chaque sommet partent deux arcs. Un tel circuit donne une suite de de Bruijn, car si on écrit la notation compactée du circuit, on y trouvera tous les