

## 4. Le problème des suites de de Bruijn en dimension 2

En dimension 2, le problème des suites de de Bruijn devient celui des tores de de Bruijn. Pour  $n = 2$ , il existe 16 carrés  $2 \times 2$  composés de 0 et de 1 (a).

La question est : peut-on remplir de 0 et de 1 un carré  $4 \times 4$  représentant la surface d'un tore (les bords haut et bas sont collés, les bords droit et gauche sont collés) de telle façon qu'en faisant glisser une

petite fenêtre carrée de taille  $2 \times 2$  sur les 16 positions possibles qu'elle peut prendre, on trouve les 16 carrés  $2 \times 2$  énumérés ci-dessous ? Une solution est figurée en b.

Si à la place de deux symboles, on en considère quatre, il y a cette fois  $4^4 = 256$  carrés possibles de taille  $2 \times 2$ , et on peut donc (au mieux) espérer utiliser la surface carrée d'un tore  $16 \times 16$  pour énumérer

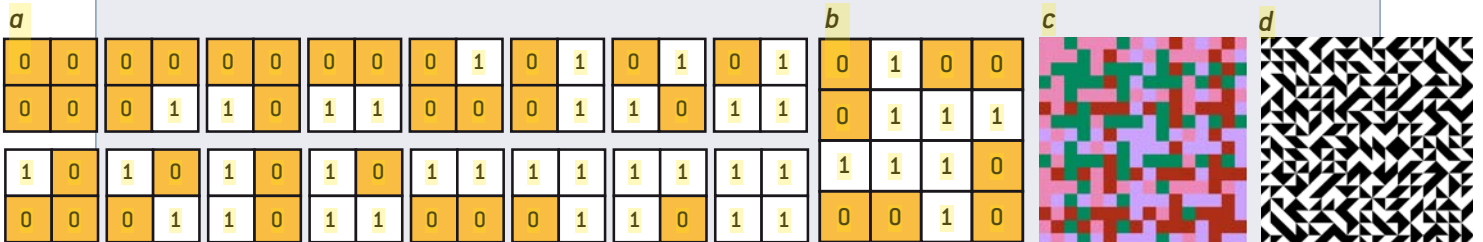
par fenêtre glissante tous les carrés possibles de taille  $2 \times 2$  utilisant quatre symboles. Une solution, figurée en couleurs, est le schéma c.

Si, à la place de quatre couleurs, on utilise les quatre façons de colorier un carré en noir et blanc en le divisant par une diagonale, on obtient un intéressant tableau abstrait (d).

Un tel pavage de surface a un intérêt pratique. Un robot se

déplaçant à la surface d'une pièce où ce motif serait dessiné pourrait, en observant uniquement les quatre carrés placés sous lui et en utilisant une table convenable (comme le magicien avec son tableau caché), savoir où il se trouve précisément.

Pour d'autres informations sur cette variante du problème de de Bruijn, voir : <http://tiny.cc/9y96fx>



s'aidera d'un petit tableau (voir l'encadré 1) qui contient les réponses. Il le placera discrètement en un endroit où lui seul peut le voir, sur un petit carton qu'il a en main ou collé sur le revers de sa veste, ou sur un des objets utilisés pour son spectacle.

### Un graphe pour tout comprendre

Reste une question : comment trouver les suites de Nicolaas de Bruijn ?

La suite utilisée est celle-ci :

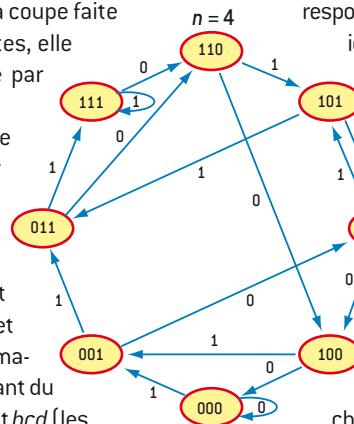
RRRRRNRNRNNRRNNNNNRNRNNNRNNRNRN.

Ramenons-nous à des bits d'information en remplaçant les N par des 1 et les R par des 0 : 00000100101100111110001101110101. Comment trouver une telle suite binaire, ou en trouver d'autres, permettant de généraliser le tour avec, par exemple, six spectateurs et un jeu de 64 cartes ?

L'idée repose sur une représentation en graphe du problème. Elle va nous conduire à une solution générale qui prouvera que les suites de de Bruijn existent pour tout ordre  $n$ . Il est plus simple d'expliquer la méthode avec

un jeu de seulement 16 cartes (on ne retient par exemple que les cœurs et les piques) et quatre spectateurs : les couleurs des cartes des quatre spectateurs dont prend connaissance le magicien fournissent maintenant 4 bits d'information au magicien ; cela lui permet de retrouver la coupe faite dans le jeu de 16 cartes, elle aussi est déterminée par 4 bits d'information.

Le graphe ci-contre permet de trouver toutes les suites de de Bruijn d'ordre 4. Il est composé de huit sommets qui sont les huit triplets possibles de 0 et de 1. On a tracé systématiquement un arc partant du triplet  $abc$  vers le triplet  $bcd$  (les deux derniers symboles de  $abc$  sont identiques aux deux premiers symboles de  $bcd$ ). On a écrit  $d$  sur l'arc qui joint  $abc$  à  $bcd$ . Cette façon de dessiner le graphe assure que de chaque sommet partent exactement deux arcs, et que sur chaque sommet arrivent exactement deux arcs. Il y a en tout 16 arcs.



Si l'on considère un chemin suivant une série de flèches liées et passant d'un sommet à un autre, on construit une suite finie de 0 et de 1. Par exemple, en partant du sommet 110 en haut, on passe à 100, puis à 001, puis à 011, puis à 110. À un tel chemin, on fait correspondre une notation compactée, ici 1100110, obtenue en notant les uns derrière les autres les noms des sommets, sans répéter les deux symboles communs à deux sommets consécutifs (en bleu) : 110-100-001-011-110 → 1100110.

Trouver une suite de de Bruijn d'ordre 4 consiste maintenant à trouver un chemin revenant à son point de départ (un « circuit ») qui passe par tous les arcs une fois et une fois seulement. Un tel circuit passe deux fois par chaque sommet du graphe, puisque de chaque sommet partent deux arcs. Un tel circuit donne une suite de de Bruijn, car si on écrit la notation compactée du circuit, on y trouvera tous les