

devait donc pas suivre une suite de de Bruijn. En 1930, une version intéressante du tour est décrite par deux autres inventeurs de tours, William Larson et T. Page Wright. Cette fois, ils manipulent un jeu de 52 cartes et demandent à trois spectateurs ayant retiré trois cartes consécutives si leur carte est un cœur, un carreau, un pique ou un trèfle. Disposant d'une information de 6 bits (2 bits par réponse) le magicien retrouve la coupe faite dans le jeu de 52 cartes (qui demande 5,7 bits d'information) et aurait même pu utiliser un paquet de 64 cartes (qui aurait nécessité 6 bits d'information).

Pour mener l'analyse mathématique de cette variante du tour, il faut utiliser des suites de symboles pris dans un alphabet à 4 symboles. C'est effectivement ce que la théorie s'est attachée à traiter. Elle considère la situation générale d'un alphabet de k symboles et des séquences de longueur n . Le problème est alors de savoir s'il existe une suite de symboles (de longueur k^n) qui donne les k^n suites de n symboles possibles quand on considère n éléments consécutifs de la suite. La réponse à ce problème généralisé est à nouveau *oui*. Nicolaas de Bruijn a même su dénombrer les solutions : pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $k \geq 1$, il existe des suites de de Bruijn de longueur k^n , et leur nombre est exactement : $(k!)^{k^{n-1}} / k^n$.

Aide au cambrioleur

Comme application amusante des suites de de Bruijn, il y a l'ouverture d'une serrure à 4 chiffres décimaux ne comportant pas de touche « entrée » : quand les quatre derniers nombres tapés sont bons, la serrure s'ouvre. Il semble qu'une attaque par la force brute exige d'essayer 10 000 combinaisons. Si on les entre les unes après les autres par ordre croissant (0000, 0001, 0002, ..., 9999), il faut taper 40 000 fois sur le clavier. En revanche, si on utilise la bonne suite de de Bruijn, il suffira de taper 10 003 touches : les 10 000 de la suite elle-même, suivies des trois premiers chiffres de la séquence pour parcourir le cycle complet.

Parmi les nombreux résultats que les mathématiciens continuent de rechercher

et de démontrer concernant les suites de de Bruijn, citons-en deux récents.

En 2011, Veronica Becher et Pablo Ariel Heiber se sont demandé si, disposant d'une suite de de Bruijn d'ordre n sur un alphabet de k symboles, il était possible de la prolonger (en en multipliant la longueur par k) de façon à obtenir une suite de de Bruijn d'ordre $n + 1$. Ils ont établi que (a) si $k \geq 3$, la réponse est toujours *oui* ; (b) si $k = 2$, alors on ne peut jamais prolonger une suite de de Bruijn d'ordre n en une suite d'ordre $n + 1$, mais on peut toujours la prolonger en une suite d'ordre $n + 2$.

Plutôt que d'avoir une suite de 0 et de 1 qui, lorsqu'on fait glisser sur elle une fenêtre de largeur n , énumère toutes les séquences de longueur n possibles (c'est la définition d'une suite de de Bruijn d'ordre n , pour l'alphabet à deux éléments 0 et 1), on peut chercher à énumérer par la même fenêtre glissante uniquement les séquences de 0 et de 1 pas trop denses, par exemple uniquement celles contenant au plus m fois le 1. C'est la question que J. Sawada, B. Stevens, A. Williams se sont posée en 2011. Leur nombre est : $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^m$.

Il s'agit de la somme des $m + 1$ premiers éléments de la ligne $n + 1$ du triangle de Pascal. Rappelons que le coefficient $m + 1$ de la ligne $n + 1$ du triangle de Pascal (aussi appelé coefficient du binôme) vaut $C_n^m = n! / (m! (n - m)!)$. Peut-on, comme dans le cas de l'énumération complète de toutes les séquences de longueur n , énumérer de la façon la plus économique possible les séquences ayant au plus m '1', c'est-à-dire en déplaçant une fenêtre de largeur n , sur une suite dont la longueur est le nombre écrit plus haut ?

La réponse, pas évidente du tout, est : oui, il existe des suites de de Bruijn pour l'énumération des séquences de longueur n et de densité au plus m .

Des versions en deux dimensions de ces problèmes d'énumération économiques ont aussi été étudiées (voir l'encadré 4) et servent en robotique. De la magie de music-hall aux difficiles problèmes combinatoires, le chemin n'est pas long, et les résultats mathématiques que l'on découvre en chemin concernent des domaines inattendus et variés, avec des applications concrètes.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur

au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

M. Dow, Minimal arrays containing all sub-array combinations of symbols : De Bruijn sequences and tori, 2014 : <http://tiny.cc/9y96fx>

J. W. Klop, Nicolaas Govert de Bruijn (1918-2012) - Mathematician, computer scientist, logician, *Indagationes Mathematicae*, vol. 24, pp. 648-656, 2013.

P. Diaconis et R. Graham, *Magical Mathematics*, Princeton University Press, 2012.

J. Sawada et al., De Bruijn sequences for the binary strings with maximum density, WALCOM'11 Proceedings of the 5th international conference on WALCOM: algorithms and computation, pp. 182-190, Springer, 2011.

V. Becher et P. A. Heiber, On extending de Bruijn sequences, *Information Processing Letters*, vol. 111, pp. 930-932, 2011.

C. Flye Sainte-Marie, Solution à la question n° 48, *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, vol. 1, pp. 107-110, 1894.



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Des aliens pas si rapides

Les physiciens déduisent la vitesse des dinosaures et celle des aliens des lois de la dynamique. Leur conclusion est qu'un athlète humain pourrait les distancer !

Roland LEHOUCQ et Jean-Sébastien STEYER

En cas de rencontre avec un alien belliqueux, mieux vaut se diriger immédiatement dans la direction opposée, à condition d'être sûr de pouvoir distancer la créature ! S'il est généralement possible de se faire une idée des performances d'un extraterrestre en le regardant se déplacer, ce n'est pas le cas de Sebulba, le pilote de course atrabilaire de *Star Wars* (*La menace fantôme*, épisode 1, 1999). Cet être présente une bipédie encore inconnue sur Terre : il a quatre membres munis de doigts (une caractéristique des tétrapodes), mais marche uniquement sur ses pattes avant. Cette locomotion nécessite une courbure marquée du dos et des membres antérieurs plus robustes et plus longs que les membres postérieurs. Dans le vivant terrestre, c'est en général l'inverse, si l'on en juge par les dinosaures théropodes, tel le *T-rex* aux bras réduits, ou par les oiseaux coureurs aux ailes atrophiées, telle l'autruche. Mais oublions Sebulba, et concentrons-nous sur la marche « classique ».

Le modèle bipède

La jambe peut être modélisée par une tige rigide pivotant autour de la hanche. La mécanique montre qu'il existe un pas « naturel », économe en énergie. Considérons un sujet qui marche sur une surface horizontale à vitesse constante. Quelle énergie doit-il dépenser pour maintenir sa vitesse, si l'on néglige la résistance de



1. LE REEK, MONSTRE IMAGINAIRE de l'univers de *Star Wars*, règne sur l'arène de Géonosis. Malgré ses pattes particulièrement courtes, il court presque aussi vite qu'un rhinocéros et peut charger les jedis jetés dans l'arène.

l'air ? À chaque fois qu'un pied se pose sur le sol, il est momentanément à l'arrêt, alors que le reste du corps poursuit son déplacement. Dès lors, quand ce pied quitte le sol, il faut que toute la jambe soit accélérée vers l'avant afin de rattraper son retard. Ensuite, elle décélère jusqu'au moment où elle se pose à nouveau sur le sol. Pendant ce processus, deux ensembles de muscles antagonistes agissent successivement sur la jambe, chacun d'eux produisant un travail égal à la variation de l'énergie cinétique du membre.

De plus, la marche nécessite de se déséquilibrer vers l'avant. Quand le pied est en appui, la jambe pivote autour de la cheville et, au moment où elle bascule, la seconde jambe avance, prend le relais, et ainsi de suite. Pendant que la jambe se redresse, la vitesse de déplacement diminue et le centre de gravité du corps s'élève, atteignant sa hauteur maximale lorsque la jambe est verticale. En plus du travail nécessaire au mouvement de la jambe, les muscles doivent donc fournir aussi l'énergie gravitationnelle nécessaire à l'élévation du centre de gravité du corps entre chaque pas.

La puissance à fournir par les muscles est donc la somme de deux termes, l'un correspondant à la puissance nécessaire pour mouvoir les jambes, qui subissent une succession d'accélération et de décélération, l'autre traduisant la puissance à fournir pour vaincre la pesanteur. Si l'on allonge le pas à vitesse constante, le premier terme

Lucasfilm Ltd. & TM. Tous droits réservés. Travail numérique par ILM.