

BIBLIOGRAPHIE

M. Rix, *The Golden Age of Botanical Art*, Univ. of Chicago Press, 2013.

T. Robinson, *William Roxburgh: the Founding Father of Indian Botany*, Phillimore and Co. / Royal Botanic Garden, 2008.

H. Noltie, *Indian Botanical Drawings, 1793-1868, from the Royal Botanic Garden*, Royal Botanic Garden, 1999.

rapportées des campagnes napoléoniennes, et les nombreux présents que lui font les savants de retour d'expédition. Peu à peu, sous la supervision des botanistes Étienne Ventenat, puis Aimé Bonpland, le jardin de la Malmaison devient incontournable pour les botanistes d'Europe. En 1810, au sommet des guerres napoléoniennes, un arrangement spécial des amirautes britannique et française autorise l'horticulteur anglais John Kennedy à franchir le blocus anglais des ports français pour envoyer à Joséphine diverses plantes, dont le rosier thé chinois *Hume's Blush Tea-Scented China*.

En 1814, Bonpland, qui répertorie les plantes cultivées dans les jardins de Joséphine, se rend à Londres pour y comparer les relevés du peintre de Joséphine, Pierre-Joseph Redouté, aux dessins de la Compagnie des Indes. Il y retrouve la plupart des

plantes chinoises cultivées à la Malmaison et à Navarre. La précision est telle qu'il perçoit même de subtiles différences entre les plantes d'origine et celles cultivées en France depuis plusieurs années, telle la pivoine moutan, arrivée en 1803 à la Malmaison.

Le travail des botanistes, des collectionneurs et des innombrables artistes anonymes de Chine et d'Inde qui ont peint les plantes recensées a contribué à établir de précieuses archives sur les plantes sauvages et cultivées de ces pays. La précision du détail et la fusion des styles artistiques orientaux et occidentaux confèrent à ces images un intérêt historique et archéologique remarquable. De telles collections nous rappellent l'origine de plantes désormais courantes partout dans le monde. Elles nous offrent aussi un plaisir intense : contempler l'art botanique dans sa plus belle expression. ■

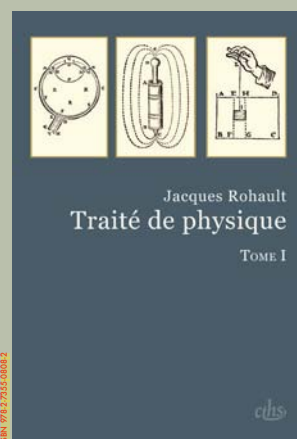
Éditions du Comité des travaux historiques et scientifiques

une collection complète d'instruments de travail pour la recherche en sciences humaines



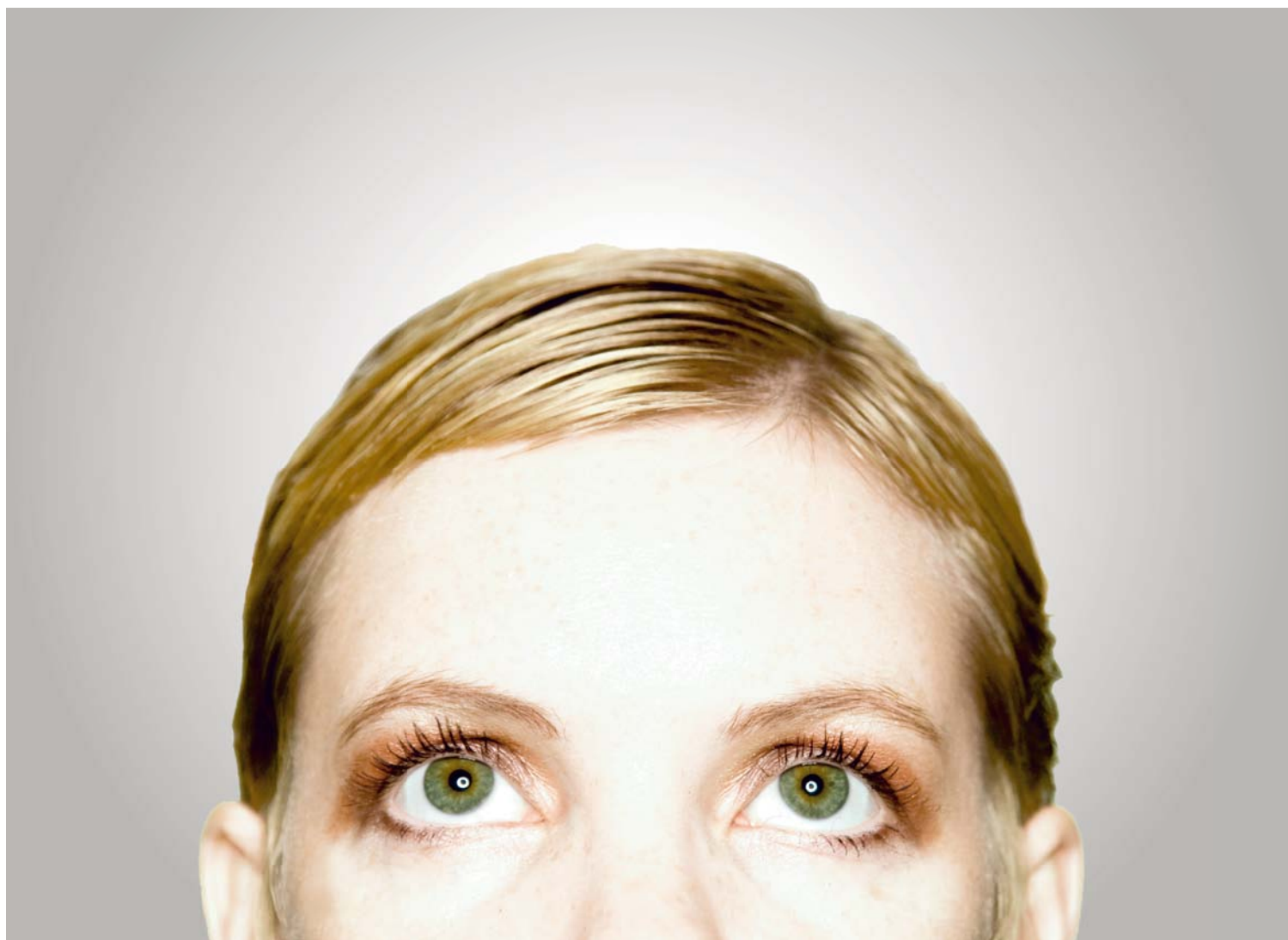
**Savants et inventeurs
entre la gloire et l'oubli**
Sous la direction de Patrice Bret
et Gérard Pajonk

136 pages
21 x 27 cm
br.
23 €



**Traité de physique
Tome I**
Jacques Rohault (1618-1672)

830 pages
15 x 22 cm
ill., 1 br.
45 €



AcademiaNet offre un service unique aux instituts de recherche, aux journalistes et aux organisateurs de conférences qui recherchent des femmes d'exception dont l'expérience et les capacités de management complètent les compétences et la culture scientifique.

AcademiaNet, base de données regroupant toutes les femmes scientifiques d'exception, offre:

- Le profil des femmes scientifiques les plus qualifiées dans chaque discipline – et distinguées par des organisations de scientifiques ou des associations d'industriels renommées
- Des moteurs de recherche adaptés à des requêtes par discipline ou par domaine d'expertise
- Des reportages réguliers sur le thème «Women in Science»

Robert Bosch **Stiftung**

Spektrum
DER WISSENSCHAFT

nature

Une initiative de la Fondation Robert Bosch en association avec
Spektrum der Wissenschaft et Nature Publishing Group

www.academia-net.org

LOGIQUE & CALCUL

Indécidables utiles et inutiles

Les affirmations sur la complexité sont souvent indécidables. D'où l'idée d'en utiliser comme axiomes pour limiter la désagréable incomplétude de toute théorie mathématique, découverte par Kurt Gödel il y a 80 ans.

Jean-Paul DELAHAYE

Ce qui est simple peut se dire en peu de mots et donc ce qui est complexe en demande beaucoup. Le hasard ne pouvant pas se résumer, il est incompressible et fournit les objets les plus complexes. Ces idées élémentaires servent de fondement à la « théorie algorithmique de l'information » ou théorie de la « complexité de Kolmogorov ». Créée il y a 50 ans par le mathématicien russe Andreï Kolmogorov et quelques autres théoriciens, son importance se confirme d'année en année : on l'utilise en physique pour définir l'entropie, en biologie pour concevoir des algorithmes de comparaison de séquences, en psychologie pour mesurer la capacité des humains à reconnaître et simuler le hasard, etc.

En logique mathématique et en philosophie des sciences, les multiples facettes de cette théorie définissent ce qu'est une suite infinie aléatoire ou une théorie complexe (voir la rubrique du numéro de mai 2013 : « Qu'est-ce qu'un objet complexe ? »). Nous verrons ici que des axiomes portant sur le hasard et la complexité enrichissent une théorie mathématique et augmentent son pouvoir de démonstration. Cinq mathématiciens d'origines variées, Laurent Bienvenu et Antoine Tavenaux, de l'Université Paris 7, Andreï Romashchenko et Alexander Shen, aujourd'hui à l'Université de Montpellier, et Stijn Vemeeren, de l'Université de Leeds en Grande-Bretagne, ont dans un article récent fait avancer notre compréhension du hasard et du rôle logique de la complexité.

1. La complexité ne peut être calculée

La complexité de Kolmogorov d'une suite finie s de 0 et de 1 est la taille du plus court programme écrit dans un langage assez puissant qui produit s . On la note $K(s)$. Une suite d'un million de 0 a une faible complexité de Kolmogorov, car il existe des programmes courts qui l'engendrent (par exemple : « Pour i de 1 à 1000 000, print '0' »). C'est vrai aussi de la suite composée d'un million de chiffres de π ou de e , car, grâce aux nombreuses séries qui donnent π ou e , on sait écrire des programmes courts qui calculent un million de chiffres de π ou de e . Il existe un programme de moins de 200 caractères

(J. Gibbons, *Amer. Math. Monthly*, vol. 113, pp. 318-328, 2006) qui réussit à exploiter de calculer indéfiniment des chiffres de π . Bien sûr, il les calcule de plus en plus lentement, mais il ne s'arrête que lorsque toute la mémoire de la machine a été utilisée. Il ne s'arrêterait pas si l'on ajoutait progressivement de la mémoire à la machine.

Il est assez facile de montrer qu'il existe des suites s de complexité $K(s)$ aussi grande qu'on le souhaite ; mais Gregory Chaitin a établi que si l'on se donne une théorie formalisée T , elle ne peut démontrer qu'un nombre fini de théorèmes de la forme « $K(s) = n$ » ou « $K(s) > n$ ».

Cela signifie que, sauf pour un nombre fini de suites s , la théorie T ignore tout de la complexité de s : la complexité est, sauf rares exceptions, indécidable. La situation est presque paradoxale : une théorie T (par exemple l'arithmétique de Peano, formalisation la plus naturelle des modes de raisonnements en arithmétique) prouve qu'il existe des suites de grande complexité, mais n'en connaît aucune. Cette forme particulière de l'incomplétude est remarquable, car contrairement aux formules dont Kurt Gödel a démontré l'indécidabilité, les formules concernant la complexité de Kolmogorov sont immédiatement compréhensibles.



Andreï Kolmogorov



Gregory Chaitin



Giuseppe Peano



Kurt Gödel

Avant d'expliquer le détail de leurs travaux rappelons que la complexité d'un objet numérique (une suite finie s de 0 et de 1) est, d'après Kolmogorov, la taille du plus court programme d'ordinateur qui engendre s . On note cette taille $K(s)$ (elle dépend peu du langage de programmation choisi). Une suite finie s de longueur n est considérée comme aléatoire si elle a une complexité de Kolmogorov proche de sa taille (par exemple supérieure à $n - c$ pour une constante c fixée). Une suite infinie s de 0 et de 1 est considérée aléatoire (on dit aléatoire au sens de Martin-Löf car ce mathématicien est à l'origine de la notion) si c'est le cas de tous les débuts de s : la

suite $(s_0, s_1, \dots, s_n, \dots)$ est aléatoire si et seulement s'il existe un nombre c tel que $K(s_0, s_1, \dots, s_n) > n - c$ pour tout entier n .

Comment compléter une théorie ?

Grâce aux célèbres résultats d'incomplétude de Kurt Gödel, nous savons depuis maintenant plus de 80 ans qu'une théorie mathématique formalisée (par exemple la théorie des ensembles) comporte inévitablement des trous : pour toute théorie formalisée T , il existe des énoncés E qualifiés d'indécidables, dont la théorie T n'est capable ni de démontrer qu'ils sont vrais, ni de démontrer

qu'ils sont faux. Parmi ces « indécidables » sur lesquels une théorie T est incapable de se prononcer, figure l'affirmation que dans la théorie T , il n'existe pas de théorème qui énonce le contraire d'un autre. On désigne cette propriété par la « consistance » de T . Une idée vient alors naturellement à l'esprit : pourquoi ne pas ajouter aux axiomes de T l'affirmation de sa consistance, $cons(T)$? On obtient ainsi une théorie plus puissante que T dont on a réduit l'incomplétude.

La théorie de la démonstration – un domaine de la logique mathématique – a étudié ce procédé de complétion qu'on applique éventuellement plusieurs fois : on ajoute l'affirmation de la consistance de T , ce qui donne une nouvelle théorie T' , on recommence avec T' , et ainsi de suite.

Dès 1939, Alan Turing a étudié ce thème qui était le sujet de sa thèse de doctorat à Princeton. Les résultats obtenus sont difficiles, car liés à la théorie des ordinaux (les nombres transfinis). Ils ont été complétés depuis, en particulier par Solomon Feferman, un élève de Gödel.

Ce domaine est malgré tout un peu décevant, car les énoncés qui affirment des propriétés de consistance sont peu pratiques pour démontrer des théorèmes mathématiques, ce qui a pour conséquence qu'il faut en ajouter beaucoup (en fait jusqu'à l'infini, puis recommencer encore et encore en utilisant la théorie des ordinaux) pour que cette méthode de complétion produise des conséquences intéressantes. En résumé, en procédant par l'ajout d'axiomes de consistance, on complète bien les théories mathématiques, mais les théories obtenues ne sont pas très commodes pour ce qui intéresse les mathématiciens et les résultats obtenus délicats à interpréter. Il fallait donc imaginer d'autres méthodes de complétion.

Le mathématicien américain Gregory Chaitin, qui formula en même temps et indépendamment de Kolmogorov la théorie algorithmique de l'information, a suggéré une voie alternative à celle des axiomes de consistance. Il a en effet démontré que les affirmations concernant la complexité de Kolmogorov des suites finies (et donc leur nature aléatoire ou non) sont souvent des indécidables de Gödel. Il a en fait établi le

2. Réduire l'incomplétude en ajoutant des axiomes

La complexité de Kolmogorov, la taille $K(s)$ du plus court programme donnant une suite s , est rarement petite. Les programmes sont des suites de 0 et de 1. Chaque programme produit une suite binaire s et certains programmes n'en produisent pas, car ils ne s'arrêtent jamais.

Le nombre de programmes de taille 99 est au plus 2^{99} (il y a 2^{99} suites différentes de 0 et de 1). Le nombre de suites s produites par les programmes de taille 99 est donc inférieur ou égal à 2^{99} . Le même raisonnement montre que les programmes de taille 1, 2, ..., 99 produisent au plus $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{99}$

suites binaires différentes. La somme de cette série géométrique est égale à $2^{100} - 1$. On en déduit que le nombre de suites s , de longueur 110 par exemple, produites par un programme de longueur inférieur à 100 est au plus 2^{100} . Cela signifie aussi que le nombre (2^{110}) de suites de longueur 110 ayant une complexité $K < 100$ est inférieur à 2^{100} . La proportion de suites de longueur 110 ayant une complexité $K < 100$ est inférieure à $2^{100}/2^{110} = 1/2^{10} = 1/1024$: moins d'une suite sur mille de longueur 110 a une complexité $K < 100$. Plus généralement, la proportion de suites de longueur n ayant une complexité $K < n - m$ est au plus $1/2^m$.

Comme il est facile d'écrire un programme de longueur proche de n qui produit une suite s de longueur n donnée (on prend le programme « PRINT s »), la complexité de Kolmogorov d'une suite de longueur n est, sauf rares exceptions, très proche de n .

Un axiome stipulant qu'une suite s de longueur n tirée au hasard a une complexité $K > n - m$ est très probablement vrai, en même temps qu'il est indécidable, car dès qu'une suite est longue on ne sait déterminer sa complexité de Kolmogorov (voir l'encadré 1).

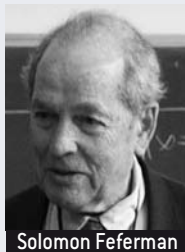
Cette façon d'ajouter comme axiomes des indécidables à une théorie T vient d'être étudiée.



Alan Turing



Per Martin-Löf



Solomon Feferman



Laurent Bienvenu