

on ajoute l'axiome « $K(s) = n$ » qui donne sa complexité. La nouvelle théorie T' a le pouvoir de démontrer tous les énoncés de la forme «Pour tout x : $F(x)$ » où F est une formule testable par programme (par exemple, « x est un multiple de 7»). Les énoncés de ce type constituent ce qu'on nomme la classe de formules Π_1 , et on montre que la plupart des questions non résolues en mathématiques sont équivalentes à des énoncés de la classe Π_1 .

C'est le cas de la conjecture de Goldbach («Tout nombre pair supérieur à 2 est somme de deux nombres premiers.»); c'est aussi le cas de l'hypothèse de Riemann, qui concerne la répartition des nombres premiers.

Notons bien que l'idée d'ajouter comme axiomes tous les énoncés de la forme « $K(s) = n$ » est étudiée ici comme on étudie ce qui se passe quand deux particules isolées interagissent. Il n'existe aucun moyen pratique d'isoler parfaitement deux particules, mais c'est intéressant quand même

de faire le calcul. Ici, il n'existe aucun moyen pratique de connaître la complexité de toutes les suites finies, qui conduirait à ajouter véritablement tous les axiomes envisagés.

On bouche un gros trou grâce à la complexité

Cependant, le résultat de cette expérience de pensée nous apprend quelque chose de profond sur l'indécidabilité: les trous que comporte toute théorie T correspondent (quand on se limite aux énoncés Π_1) à un manque d'information sur la complexité. L'indécidabilité de Gödel provient donc de ce qu'une théorie donnée T n'a jamais une assez bonne connaissance de la complexité et qu'il est impossible de mettre toute cette connaissance dans des axiomes simples. En deux mots: l'indécidabilité gödelienne provient de l'ignorance de la complexité.

L. Bienvenu et ses collègues se sont aussi interrogés sur ce que donnerait une informa-

tion partielle sur la complexité, fournie par un nombre limité d'axiomes. Ils montrent que pour qu'une théorie soit capable de démontrer toutes les formules Π_1 de taille au plus n , il suffit d'ajouter un axiome unique de la forme $K(s) > n$ pour une suite finie s bien choisie de longueur n . Les suites s utilisables pour cet ajout concentrent en elles l'information nécessaire pour connaître la complexité de toutes les suites de longueur au plus n .

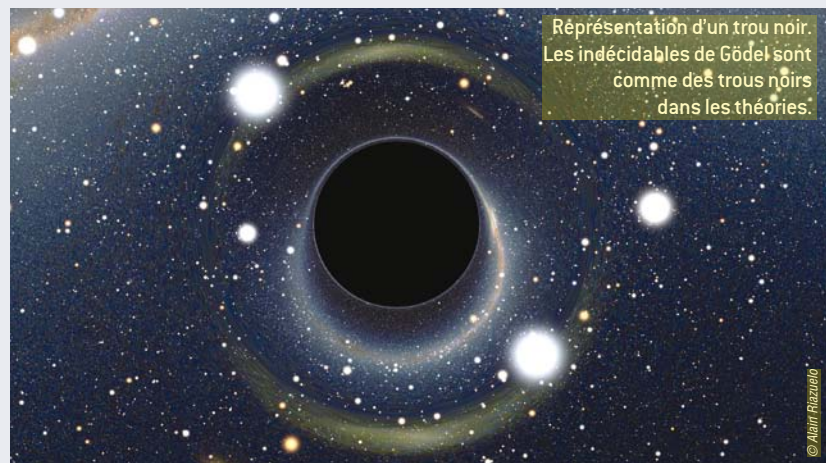
Quand on veut rendre décidables toutes les formules Π_1 , cette façon de procéder est beaucoup plus économique en axiomes que la précédente (qui ajoutait tous les « $K(s) = n$ »). Les cinq chercheurs en déduisent le beau théorème suivant: pour tout entier n , il existe un indécidable dont la taille est approximativement n , qui est une formule Π_1 et qui, ajoutée aux axiomes de l'arithmétique de Peano, supprime tous les indécidables Π_1 de taille inférieure à n . En clair, pour boucher tous les trous correspondant à des formules Π_1

4. Le rôle des formules Π_1

Un théorème central figure dans le travail de Laurent Bienvenu, Andrei Romashchenko, Alexander Shen, Antoine Tavenaux et Stijn Vermeeren. Ce théorème indique non seulement que pour une théorie T , connaître la complexité de toutes les séquences finies permet de supprimer tous les indécidables Π_1 et réciproquement; il indique aussi ce qui se passe quand T ne connaît que partiellement ce type d'information.

Le théorème utilise la notion de complexité d'une formule (fondée sur la même idée que la définition de la complexité de Kolmogorov) et il énonce que les trois méthodes suivantes pour compléter une théorie T sont équivalentes:

- Ajouter aux axiomes toutes les formules indiquant la complexité de séquences s qui ont une complexité $K(s)$ inférieure à n .
- Ajouter aux axiomes toutes les formules Π_1 vraies dont la complexité (comme formule) est inférieure à n ;
- Ajouter un seul axiome $K(r_n) > n$ pour une séquence r_n dont la construction est



précisée et qui est donc une séquence concentrant toute l'information jusqu'au niveau n qu'il faut connaître pour supprimer les indécidables Π_1 de complexité inférieure à n .

Un tel théorème, contrairement aux résultats envisageant d'ajouter une infinité d'axiomes pour supprimer tous les indécidables Π_1 , permet d'envisager réellement

une complétion progressive de l'arithmétique de Peano dans le but de supprimer petit à petit les indécidables Π_1 .

Kurt Gödel a défendu l'idée qu'il fallait tenter de compléter les axiomes de nos théories pour en limiter l'incomplétude. Ce théorème indique une voie possible et montre qu'il existe des méthodes systématiques pour ce faire (au moins pour les formules Π_1).

de taille inférieure à n , un seul axiome supplémentaire assez court suffit.

Les séquences finies s qui permettent ces complétions efficaces sont-elles nombreuses ? La réponse à cette question a été trouvée et, sans surprise, elle est négative : pour compléter efficacement, il faut bien choisir s et c'est difficile, car les s qui conviennent sont en petit nombre.

Un effet limité...

Un autre théorème intéressant généralise le théorème de G. Chaitin mentionné plus haut. Il affirme que, même très efficaces, ces complétions par des axiomes bien choisis n'ont qu'un effet fini, et qu'il faut donc ajouter une infinité d'axiomes pour faire disparaître les indécidables Π_1 . Voici l'énoncé : « Il existe une constante c (qui dépend seulement de la théorie T) telle que, pour tout d fixé, l'ensemble des axiomes vrais de la forme $K[s] > d$ ne peut pas prouver des propriétés de la forme $K[s] > c + d$. »

Autrement dit, la connaissance requise pour savoir quelles suites ont une complexité supérieure à d ne permet pas de savoir quelles suites ont une complexité supérieure à $c + d$: une connaissance « locale » jusqu'à d de la complexité n'est jamais en mesure d'en fournir une connaissance dépassant $c + d$.

La conclusion de cet ensemble de résultats, dont nous n'avons reproduit ici qu'une petite partie, est que, d'une part, l'information sur la complexité des suites finies est bien au cœur de l'indécidabilité (au moins pour les formules Π_1), et que, d'autre part, la force axiomatique d'information sur la complexité est puissante et est susceptible d'une certaine concentration.

La définition des suites infinies aléatoires rappelée au début suggère une idée : trouver une suite infinie aléatoire (au sens de Martin-Löf) unique s et ajouter à T les axiomes indiquant que cette suite particulière est aléatoire. Cet ajout limité correspondant à une affirmation portant sur une unique suite infinie peut-il dire tout ce qui est nécessaire pour que toutes les formules Π_1 deviennent décidables ?

La réponse est négative. Cet objectif ne peut être atteint ; aucune suite infinie

aléatoire ne le permet. Cela résulte d'un théorème des cinq chercheurs : l'ensemble d'axiomes affirmant qu'une suite est aléatoire au sens de Martin-Löf n'est jamais suffisant pour supprimer tous les indécidables Π_1 .

Une multitude d'autres résultats affinant notre compréhension de la force axiomatique du hasard sont présentés et démontrés. Précisons qu'à côté de ces résultats de limitation, des résultats expérimentaux d'une équipe réunie autour de Fernando Soler-Toscano, à laquelle je participe, montrent qu'à condition d'accepter d'effectuer des calculs massifs, une certaine connaissance approchée robuste de la complexité de Kolmogorov est possible et que cette connaissance qui s'applique y compris aux séquences courtes est utile aujourd'hui et sert d'étalon pour mener des expériences en psychologie (voir la bibliographie).

Une méthode automatique d'ajouts progressifs d'axiomes utiles (pour rendre décidables les formules indécidables de Π_1) pourrait s'en déduire pour celui qui disposerait d'une capacité de calcul indéfiniment croissante. En utilisant la technique de cette équipe, on obtiendrait pour des suites finies de plus en plus nombreuses des approximations de $K[s]$ qui s'amélioreraient et qu'on ajouterait et modifierait au fur et à mesure du déroulement du calcul.

Des liens devenant précis

Le phénomène de l'incomplétude découvert et démontré par Gödel en 1930 est troublant et toute philosophie des mathématiques (et même des sciences) se doit d'en rendre compte et d'en fournir la compréhension. Les liens établis entre cette incomplétude, la complexité et le hasard que plusieurs résultats de G. Chaitin, Per Martin-Löf et Leonid Levin avaient déjà fait apparaître deviennent maintenant très précis, grâce aux théorèmes établis par l'équipe réunie autour de L. Bienvenu. On sait désormais que ce qui manque dans une théorie formalisée, c'est essentiellement de l'information sur la complexité et le hasard, et on commence à comprendre comment on peut ajouter cette information de façon plus ou moins efficace.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur

au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

L. Bienvenu et al., *The axiomatic power of Kolmogorov complexity*, *Annals of Pure and Applied Logic*, à paraître, 2014 [arxiv.org/pdf/1301.3392.pdf].

F. Soler-Toscano et al., *Calculating Kolmogorov complexity from the output of frequency distributions of small Turing machines*, *PLoS ONE*, vol. 9(5), e96223, 2014.

A. Tavenaux, *Puissance logique et calculatoire de l'aléa algorithmique*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2013.

S. Vermeeren, *Notions and Applications of Algorithmic Randomness*, Thèse de doctorat, Université de Leeds, 2013.

N. Gauvrit et al., *Algorithmic complexity for short binary strings applied to psychology: a primer*, *Behavior Research Methods*, en ligne le 6/12/2013 [http://tiny.cc/7ahehx].



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr