

de taille inférieure à n , un seul axiome supplémentaire assez court suffit.

Les séquences finies s qui permettent ces complétions efficaces sont-elles nombreuses ? La réponse à cette question a été trouvée et, sans surprise, elle est négative : pour compléter efficacement, il faut bien choisir s et c'est difficile, car les s qui conviennent sont en petit nombre.

Un effet limité...

Un autre théorème intéressant généralise le théorème de G. Chaitin mentionné plus haut. Il affirme que, même très efficaces, ces complétions par des axiomes bien choisis n'ont qu'un effet fini, et qu'il faut donc ajouter une infinité d'axiomes pour faire disparaître les indécidables Π_1 . Voici l'énoncé : « Il existe une constante c (qui dépend seulement de la théorie T) telle que, pour tout d fixé, l'ensemble des axiomes vrais de la forme $K[s] > d$ ne peut pas prouver des propriétés de la forme $K[s] > c + d$. »

Autrement dit, la connaissance requise pour savoir quelles suites ont une complexité supérieure à d ne permet pas de savoir quelles suites ont une complexité supérieure à $c + d$: une connaissance « locale » jusqu'à d de la complexité n'est jamais en mesure d'en fournir une connaissance dépassant $c + d$.

La conclusion de cet ensemble de résultats, dont nous n'avons reproduit ici qu'une petite partie, est que, d'une part, l'information sur la complexité des suites finies est bien au cœur de l'indécidabilité (au moins pour les formules Π_1), et que, d'autre part, la force axiomatique d'information sur la complexité est puissante et est susceptible d'une certaine concentration.

La définition des suites infinies aléatoires rappelée au début suggère une idée : trouver une suite infinie aléatoire (au sens de Martin-Löf) unique s et ajouter à T les axiomes indiquant que cette suite particulière est aléatoire. Cet ajout limité correspondant à une affirmation portant sur une unique suite infinie peut-il dire tout ce qui est nécessaire pour que toutes les formules Π_1 deviennent décidables ?

La réponse est négative. Cet objectif ne peut être atteint ; aucune suite infinie

aléatoire ne le permet. Cela résulte d'un théorème des cinq chercheurs : l'ensemble d'axiomes affirmant qu'une suite est aléatoire au sens de Martin-Löf n'est jamais suffisant pour supprimer tous les indécidables Π_1 .

Une multitude d'autres résultats affinant notre compréhension de la force axiomatique du hasard sont présentés et démontrés. Précisons qu'à côté de ces résultats de limitation, des résultats expérimentaux d'une équipe réunie autour de Fernando Soler-Toscano, à laquelle je participe, montrent qu'à condition d'accepter d'effectuer des calculs massifs, une certaine connaissance approchée robuste de la complexité de Kolmogorov est possible et que cette connaissance qui s'applique y compris aux séquences courtes est utile aujourd'hui et sert d'étalon pour mener des expériences en psychologie (voir la bibliographie).

Une méthode automatique d'ajouts progressifs d'axiomes utiles (pour rendre décidables les formules indécidables de Π_1) pourrait s'en déduire pour celui qui disposerait d'une capacité de calcul indéfiniment croissante. En utilisant la technique de cette équipe, on obtiendrait pour des suites finies de plus en plus nombreuses des approximations de $K[s]$ qui s'amélioreraient et qu'on ajouterait et modifierait au fur et à mesure du déroulement du calcul.

Des liens devenant précis

Le phénomène de l'incomplétude découvert et démontré par Gödel en 1930 est troublant et toute philosophie des mathématiques (et même des sciences) se doit d'en rendre compte et d'en fournir la compréhension. Les liens établis entre cette incomplétude, la complexité et le hasard que plusieurs résultats de G. Chaitin, Per Martin-Löf et Leonid Levin avaient déjà fait apparaître deviennent maintenant très précis, grâce aux théorèmes établis par l'équipe réunie autour de L. Bienvenu. On sait désormais que ce qui manque dans une théorie formalisée, c'est essentiellement de l'information sur la complexité et le hasard, et on commence à comprendre comment on peut ajouter cette information de façon plus ou moins efficace.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

L. Bienvenu et al., *The axiomatic power of Kolmogorov complexity*, *Annals of Pure and Applied Logic*, à paraître, 2014 (arxiv.org/pdf/1301.3392.pdf).

F. Soler-Toscano et al., *Calculating Kolmogorov complexity from the output of frequency distributions of small Turing machines*, *PLoS ONE*, vol. 9(5), e96223, 2014.

A. Tavenaux, *Puissance logique et calculatoire de l'aléa algorithmique*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 2013.

S. Vermeeren, *Notions and Applications of Algorithmic Randomness*, Thèse de doctorat, Université de Leeds, 2013.

N. Gauvrit et al., *Algorithmic complexity for short binary strings applied to psychology: a primer*, *Behavior Research Methods*, en ligne le 6/12/2013 (<http://tiny.cc/?ahehx>).



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr

SCIENCE & FICTION

Des vampires pas si imaginaires

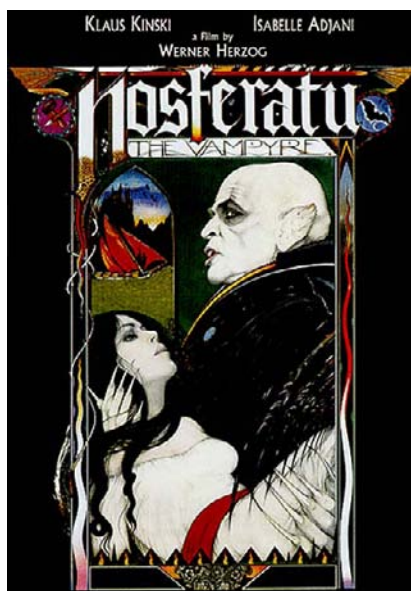
Personnage incontournable de la culture fantastique, le vampire se comporte tel un parasite se nourrissant du sang de ses victimes. Bien réels, les moustiques, les tiques et certaines chauves-souris en font tout autant.

Jean-Sébastien STEYER et Roland LEHOUCQ

Dracula, Nosferatu, Vlad l'empaleur, Lestat, Carmilla... ont des noms variés, mais ne forment qu'une seule et même entité gothique issue de lointains folklores ou d'anciennes superstitions. Le vampire (*vampyre* en vieux français, *upir* en slave) est un mort-vivant qui se nourrit du sang des vivants et en tire sa force vitale.

Ces êtres ont fait parler d'eux au XVIII^e siècle. La population croyait que ces monstres rôdaient parmi les hommes. En 1751, le moine bénédictin Augustin Calmet a expliqué comment reconnaître un vampire dans son *Traité sur les apparitions*. Il y affirmait qu'un vampire a la peau violacée ou pâle à cause de son penchant pour le sang. Tantôt très pileux tantôt chauve, il peut avoir des oreilles pointues. Dans une vision plus moderne, le vampire arbore un aspect gothique élégant pour mieux attirer ses proies, en majorité de jeunes adolescents. Mais la caractéristique commune demeure des canines longues et pointues, utilisées lors du « baiser ». Notons cependant que, chez le *Nosferatu* de Werner Herzog, interprété par Klaus Kinski, ce sont les incisives qui sont hypertrophiées (comme chez les rongeurs et les lapins !) et non les canines.

Dans les films et les livres, la survie du vampire dépend des humains, alors que la réciproque est fautive : le vampire répond donc à la définition du parasite. Le fait qu'il ne soit pas en permanence en train de s'abreu-



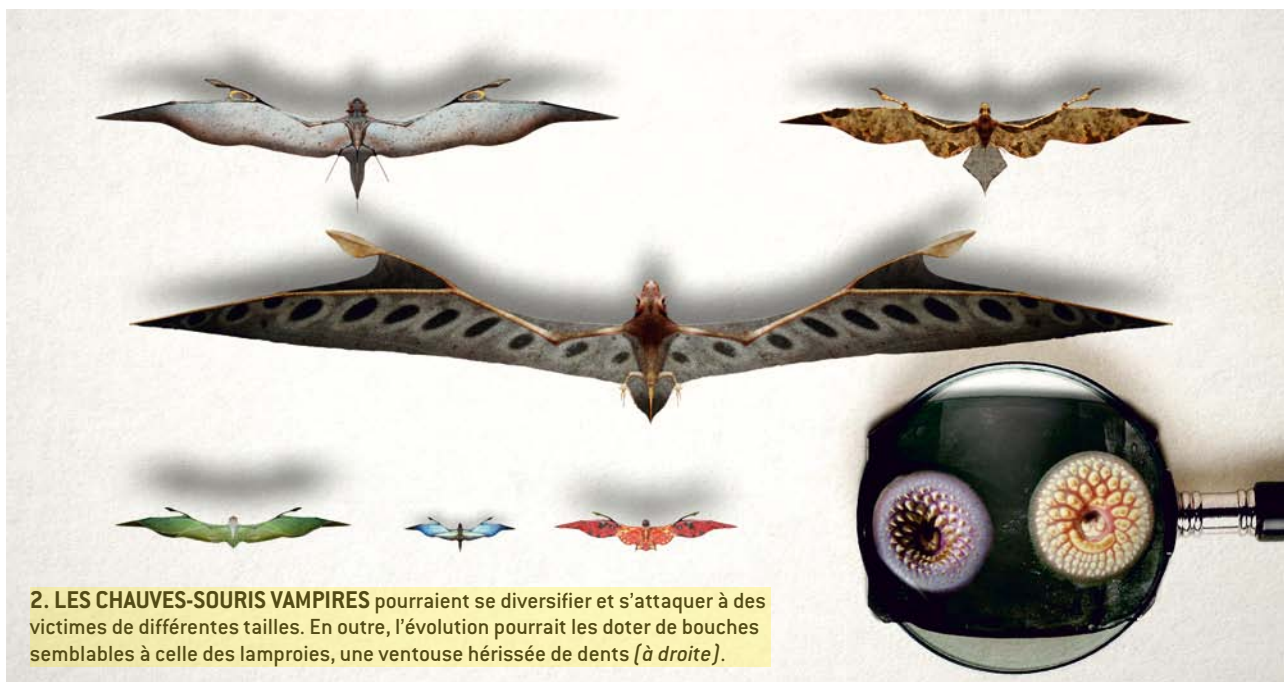
1. DANS LE FILM NOSFERATU (1979) de Werner Herzog, Klaus Kinski joue le rôle du comte Dracula qui chasse la nuit, à la recherche d'une victime pour se nourrir de son sang.

ver au cou d'un homme en fait un parasite temporaire. Il existe bien sûr des variantes selon les histoires : certains vampires se compliquent la vie en ne sélectionnant que du sang de jeunes filles vierges (comme c'est le cas du *Nosferatu* de Werner Herzog), tandis que d'autres ne sortent que la nuit. Notons que le *Dracula* de Bram Stoker (1897) arpente les rues de Londres en plein jour. Ces contraintes d'approvisionnement en sang, même si elles ajoutent du piment au scénario, diminuent la probabilité d'une rencontre entre le parasite et sa victime et réduisent d'autant les chances de survie du vampire. Elles illustrent le fait qu'un organisme hyperspécialisé est beaucoup plus fragile qu'un individu généraliste.

Un parasite hémaphophage

Autre caractéristique, le vampire est un parasite externe, ou ectoparasite, qui puise le sang de l'extérieur. Ce n'est pas le cas des micro-organismes qui vivent dans le sang de leur hôte : ces endoparasites, tels que le protozoaire *Plasmodium* ou le ver *Onchocerca*, sont responsables de graves maladies – respectivement le paludisme et la « cécité des rivières ». Ils sont véhiculés par des moustiques ou autre suceurs de sang externes.

Dans le monde réel, les hémaphophages (littéralement « mangeurs de sang ») ne



2. LES CHAUVES-SOURIS VAMPIRES pourraient se diversifier et s'attaquer à des victimes de différentes tailles. En outre, l'évolution pourrait les doter de bouches semblables à celle des lamproies, une ventouse hérissée de dents (à droite).

sont pas uniquement microscopiques. Comme le sang est une nourriture abondante et riche (en glucose, lipides et protéines contenus dans le plasma), certains animaux en ont fait leur source de nourriture. Ainsi, les « chauves-souris vampires », ou *Desmodontinae*, forment un petit groupe représenté par trois espèces tropicales d'Amérique centrale et du Sud. Elles ne s'attaquent que rarement à l'homme. Grâce à des capteurs infrarouges situés autour du museau, ces chauves-souris repèrent leurs proies à sang chaud – oiseaux ou mammifères – et s'y fixent dès qu'elles sont endormies. Elles les mordent tout en sécrétant un puissant anticoagulant nommé... draculine. Cette protéine – utilisée en médecine et prescrite à des personnes victimes d'un arrêt cardiaque – inhibe la coagulation du sang tout en conservant sa viscosité. La chauve-souris hémophile lape alors la plaie hémophile, parfois jusqu'à ne plus pouvoir redécoller tant elle s'est gavée !

Dans la plupart des histoires, le vampire est vorace. Il saigne sa victime (souvent de sexe opposé pour ajouter une touche d'érotisme) jusqu'à la vider de son sang : il est alors « parasitoïde » et non plus parasite, car il tue son hôte. Certains vampires prennent cependant soin de ne prélever qu'une petite fraction des quatre à cinq litres – sept à huit pour cent de la masse corporelle – fabriqués en permanence par exemple chez une femme de corpulence

moyenne. La victime est alors maintenue en vie afin de pérenniser la relation entre le parasite et son hôte. Notons que les femmes enceintes et les hommes, avec un volume sanguin de six litres en moyenne, devraient être des proies privilégiées...

La rage du vampire

On pourrait aussi imaginer des vampires pacifiques et modernes, profitant des techniques de transfusion sanguine pour se libérer de cette contraignante relation hôte-parasite : ils se promèneraient tranquillement avec leurs poches de sang (une idée que l'on trouve par exemple dans le film *Underworld*, 2003), évitant ainsi de « polluer » leur cheptel. Car le vampire, comme de nombreux hémaphages réels, peut aussi infecter sa proie et nombreuses sont les histoires où les mordus deviennent à leur tour vampires : le vampirisme serait contagieux, telle une maladie transmise par le sang.

D'ailleurs, certaines affections passaient autrefois pour du vampirisme. C'était le cas de la tuberculose, où les malades ont parfois du sang sur les lèvres ou de la porphyrie qui s'accompagne d'une destruction de l'épiderme exposé à la lumière, d'une coloration en rouge des dents et des ongles, et d'une allergie à l'allicine (un composé de l'ail), autant de caractéristiques d'un vampire.

Pour certains historiens, les épidémies de rage en Europe de l'Est ont précédé les

premiers récits de vampires. En effet, certains signes de la rage – agressivité, hypersensibilité à la lumière – ont souvent été associés aux vampires. En outre, Nosferatu proviendrait du grec *nosophoros* signifiant « porteur de contagion ». Le vampire est donc aussi un fléau, vecteur de maladies, autrement dit un « infecté », un banni ou un maudit, de la même façon que le moustique anophèle transmet le paludisme en piquant sa victime.

Et les dents des vampires ? Elles sont peut-être dotées d'un sillon en surface ou même d'un canal central qui, à l'instar des seringues ou des crochets venimeux de serpents ou de chélicérates (scorpions, araignées, etc.), leur permettrait d'aspirer le sang.

Les hémaphages ont aussi développé des instruments adaptés : le moustique pique avec une trompe qui est un élément hyperallongé du labium (ou « lèvres »), tandis que la lamproie (*Petromyzon*) dispose, en plus d'une langue râpeuse, d'un disque buccal composé d'une multitude de dents acérées, qui fait ventouse sur la proie. On retrouve ces dernières caractéristiques chez les « Reapers », des vampires imaginés par Guillermo del Toro dans son film *Blade II*. Ainsi, nous côtoyons, parfois sans le savoir, de multiples vampires. Tentons un mauvais jeu de mots : ne perdons pas notre sang-froid ! ■

J.-S. STEYER est paléontologue au CNRS-MNHN, à Paris. R. LEHOUCQ est astrophysicien au CEA, à Saclay.