

LOGIQUE & CALCUL

Promenades carrées et cubes collés

Construire des polygones formés de carrés ou des polyèdres formés de cubes en respectant une certaine règle donne naissance à des énigmes originales, voire décoratives.

Jean-Paul DELAHAYE

En septembre 1990, paraissait dans *Pour la Science* un article d'Alexander Dewdney sur un problème insignifiant en apparence : pour quelles valeurs de l'entier n existe-t-il des polygones n'ayant que des angles droits et dont les côtés ont, dans l'ordre, les longueurs 1, 2, 3, ..., n ? La plus petite solution est indiquée dans l'encadré 1.

Une autre façon de poser le problème évoque le parcours d'un promeneur. Dans une ville dont les rues dessinent une grille carrée parfaite, peut-on partir d'un croisement, parcourir un bloc, tourner à angle droit (à gauche ou à droite), parcourir deux blocs, tourner à angle droit (à gauche ou à droite), parcourir trois blocs, etc. et se retrouver à son point de départ au bout d'un certain temps ?

Compter les golygones

Le problème avait été inventé par le Britannique Lee Sallows en 1988. Il avait choisi, on ne sait pas vraiment pourquoi, de nommer ces figures des « golygones ». Progressivement, L. Sallows était arrivé à la conclusion qu'il n'existe de golygones que pour les valeurs de n multiples de 8 (voir l'encadré 1). Il découvrit le seul golygone à huit côtés et remarqua qu'il pave le plan. Les golygones à $8n$ côtés sont par convention les golygones d'ordre n . Leur nombre est noté $a(n)$. Puisqu'il n'y a qu'un golygone à huit côtés, $a(1) = 1$. Les golygones d'ordre 2 ont 16 côtés, et leur nombre est $a(2) = 28$. Parmi eux, seuls trois ne se recoupent pas.

À l'aide de programmes, on a calculé que $a(3) = 2\,108$ (il existe 2 108 golygones d'ordre 3 à 24 côtés), $a(4) = 227\,322$ (il y a 227 322 golygones d'ordre 4 à 32 côtés), etc.

On a ainsi : $a(1) = 1$, $a(2) = 28$, $a(3) = 2\,108$, $a(4) = 227\,322$, $a(5) = 30\,276\,740$, $a(6) = 4\,541\,771\,016$, $a(7) = 739\,092\,675\,672$, $a(8) = 127\,674\,038\,970\,623$, $a(9) = 23\,085\,759\,901\,610\,016$, $a(10) = 432\,797\,330\,819\,710\,3600$, etc. Pour les $a(n)$ jusqu'à $n = 100$, voir : <http://oeis.org/A007219/b007219.txt>

Ces décomptes n'ont pas été faits par énumération un à un des golygones – on n'aurait au mieux atteint que $a(11)$ –, mais en utilisant des propriétés particulières des golygones, dont celle-ci dont vous devinez sans mal l'explication : en prenant les déplacements horizontaux d'un golygone (une suite d'indications « à droite » ou « à gauche »), et les déplacements verticaux d'un autre golygone (une suite d'indications « vers le haut » ou « vers le bas ») et en assemblant ces indications, on obtient un nouveau golygone.

On connaît une formule approchée pour $a(n)$: $a(n) \sim 3 \times 2^{8n-6} / (\pi n^2 [4n+1])$. Une formule exacte, mais très compliquée, a aussi été proposée (voir la page <http://oeis.org/A007219> de l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane). Ces résultats proviennent pour l'essentiel d'un article publié en 1991 (voir la bibliographie) par quatre auteurs aux pedigrees remarquables : L. Sallows, l'inventeur du problème

et dont nous avons présenté les extraordinaires « carrés géomagiques » dans cette rubrique en juin 2013 ; Martin Gardner, auteur de la chronique mathématique de *Scientific American* pendant 25 ans (reprise dans *Pour la Science* de 1977 à 1982) et qui fut enchanté de participer à l'étude de ces curieux cheminements ; Richard Guy, connu en particulier pour sa féconde collaboration avec John Conway en théorie des jeux, et Donald Knuth à qui l'on doit la bible des informaticiens *The Art of Computer Programming*, ouvrage de plus de 2 000 pages commencé en 1962 et dont une nouvelle édition a été achevée en 2011.

Cette exceptionnelle association montre que l'intérêt pour les petites énigmes mathématiques n'est pas réservée aux amateurs sans grade, et que celles-ci sont pour les véritables mathématiciens amoureux de leur discipline des sujets tout aussi respectables que les problèmes académiques... et abscons.

Ne pas passer deux fois au même endroit

Savoir combien de golygones d'ordre n , parmi les $a(n)$, ne se recoupent pas (voir l'encadré 2) et donc déterminent des polyminos est en réalité assez délicat et oblige cette fois à énumérer un à un les golygones d'ordre n . Aucune formule exacte ou approchée n'a été trouvée. Ces nombres définissent la suite notée $b(n)$. Dans leur article de 1991, les quatre mathématiciens indiquaient que $b(1) = 1$, $b(2) = 3$, $b(3) = 67$. Ils précisaient