

LOGIQUE & CALCUL

Promenades carrées et cubes collés

Construire des polygones formés de carrés ou des polyèdres formés de cubes en respectant une certaine règle donne naissance à des énigmes originales, voire décoratives.

Jean-Paul DELAHAYE

En septembre 1990, paraissait dans *Pour la Science* un article d'Alexander Dewdney sur un problème insignifiant en apparence : pour quelles valeurs de l'entier n existe-t-il des polygones n'ayant que des angles droits et dont les côtés ont, dans l'ordre, les longueurs 1, 2, 3, ..., n ? La plus petite solution est indiquée dans l'encadré 1.

Une autre façon de poser le problème évoque le parcours d'un promeneur. Dans une ville dont les rues dessinent une grille carrée parfaite, peut-on partir d'un croisement, parcourir un bloc, tourner à angle droit (à gauche ou à droite), parcourir deux blocs, tourner à angle droit (à gauche ou à droite), parcourir trois blocs, etc. et se retrouver à son point de départ au bout d'un certain temps ?

Compter les golygones

Le problème avait été inventé par le Britannique Lee Sallows en 1988. Il avait choisi, on ne sait pas vraiment pourquoi, de nommer ces figures des « golygones ». Progressivement, L. Sallows était arrivé à la conclusion qu'il n'existe de golygones que pour les valeurs de n multiples de 8 (voir l'encadré 1). Il découvrit le seul golygone à huit côtés et remarqua qu'il pave le plan. Les golygones à $8n$ côtés sont par convention les golygones d'ordre n . Leur nombre est noté $a(n)$. Puisqu'il n'y a qu'un golygone à huit côtés, $a(1) = 1$. Les golygones d'ordre 2 ont 16 côtés, et leur nombre est $a(2) = 28$. Parmi eux, seuls trois ne se recoupent pas.

À l'aide de programmes, on a calculé que $a(3) = 2\,108$ (il existe 2 108 golygones d'ordre 3 à 24 côtés), $a(4) = 227\,322$ (il y a 227 322 golygones d'ordre 4 à 32 côtés), etc.

On a ainsi : $a(1) = 1$, $a(2) = 28$,
 $a(3) = 2\,108$, $a(4) = 227\,322$,
 $a(5) = 30\,276\,740$, $a(6) = 4\,541\,771\,016$,
 $a(7) = 739\,092\,675\,672$,
 $a(8) = 127\,674\,038\,970\,623$,
 $a(9) = 23\,085\,759\,901\,610\,016$,
 $a(10) = 432\,797\,330\,819\,710\,3600$, etc.
 Pour les $a(n)$ jusqu'à $n = 100$, voir :
<http://oeis.org/A007219/b007219.txt>

Ces décomptes n'ont pas été faits par énumération un à un des golygones – on n'aurait au mieux atteint que $a(11)$ –, mais en utilisant des propriétés particulières des golygones, dont celle-ci dont vous devinez sans mal l'explication : en prenant les déplacements horizontaux d'un golygone (une suite d'indications « à droite » ou « à gauche »), et les déplacements verticaux d'un autre golygone (une suite d'indications « vers le haut » ou « vers le bas ») et en assemblant ces indications, on obtient un nouveau golygone.

On connaît une formule approchée pour $a(n)$: $a(n) \sim 3 \times 2^{8n-6} / (\pi n^2 (4n+1))$. Une formule exacte, mais très compliquée, a aussi été proposée (voir la page <http://oeis.org/A007219> de l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane). Ces résultats proviennent pour l'essentiel d'un article publié en 1991 (voir la bibliographie) par quatre auteurs aux pedigrees remarquables : L. Sallows, l'inventeur du problème

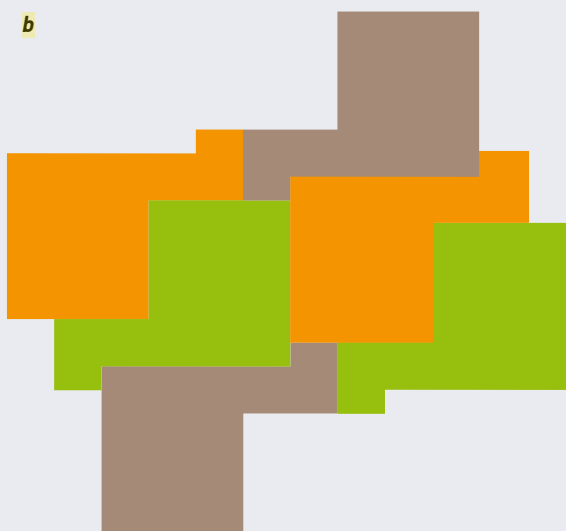
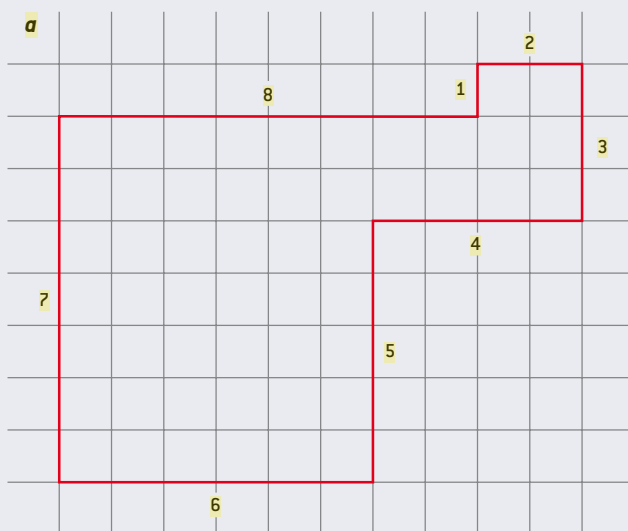
et dont nous avons présenté les extraordinaires « carrés géomagiques » dans cette rubrique en juin 2013 ; Martin Gardner, auteur de la chronique mathématique de *Scientific American* pendant 25 ans (reprise dans *Pour la Science* de 1977 à 1982) et qui fut enchanté de participer à l'étude de ces curieux cheminements ; Richard Guy, connu en particulier pour sa féconde collaboration avec John Conway en théorie des jeux, et Donald Knuth à qui l'on doit la bible des informaticiens *The Art of Computer Programming*, ouvrage de plus de 2 000 pages commencé en 1962 et dont une nouvelle édition a été achevée en 2011.

Cette exceptionnelle association montre que l'intérêt pour les petites énigmes mathématiques n'est pas réservée aux amateurs sans grade, et que celles-ci sont pour les véritables mathématiciens amoureux de leur discipline des sujets tout aussi respectables que les problèmes académiques... et abscons.

Ne pas passer deux fois au même endroit

Savoir combien de golygones d'ordre n , parmi les $a(n)$, ne se recoupent pas (voir l'encadré 2) et donc déterminent des polyminos est en réalité assez délicat et oblige cette fois à énumérer un à un les golygones d'ordre n . Aucune formule exacte ou approchée n'a été trouvée. Ces nombres définissent la suite notée $b(n)$. Dans leur article de 1991, les quatre mathématiciens indiquaient que $b(1) = 1$, $b(2) = 3$, $b(3) = 67$. Ils précisaient

1. Le seul golygone d'ordre 1



Un golygone est un polygone dont tous les côtés sont à angle droit, et ont pour longueur les entiers 1, 2, ..., n , dans l'ordre.

Il n'existe qu'un seul golygone à huit côtés (a). C'est le seul golygone connu qui pave le plan (b). Un golygone a nécessairement un nombre de côtés multiple de 8.

Voici la démonstration en six petites étapes de cette affirmation.

1) Donnons-nous un golygone ayant n côtés. Il est clair que n est pair, car il y a autant de segments horizontaux que de segments verticaux : $n = 2m$.

2) Supposons (sans perte de généralité) que le côté de longueur 1 est vertical. Les côtés verticaux (ils alternent avec les côtés horizontaux) ont pour longueur 1, 3, ..., $2m - 1$. La somme de leurs longueurs est donc $1 + 3 + \dots + (2m - 1) = m^2$.

3) Ce nombre, m^2 , est pair car la somme des longueurs des côtés qui montent est égale à la somme des longueurs des côtés qui descendent. Donc m lui-même est pair.

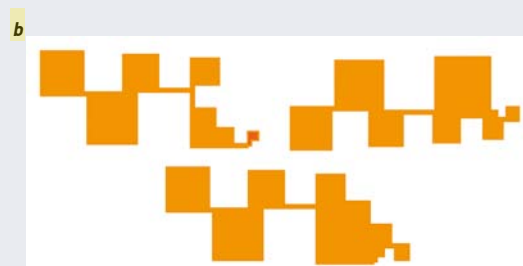
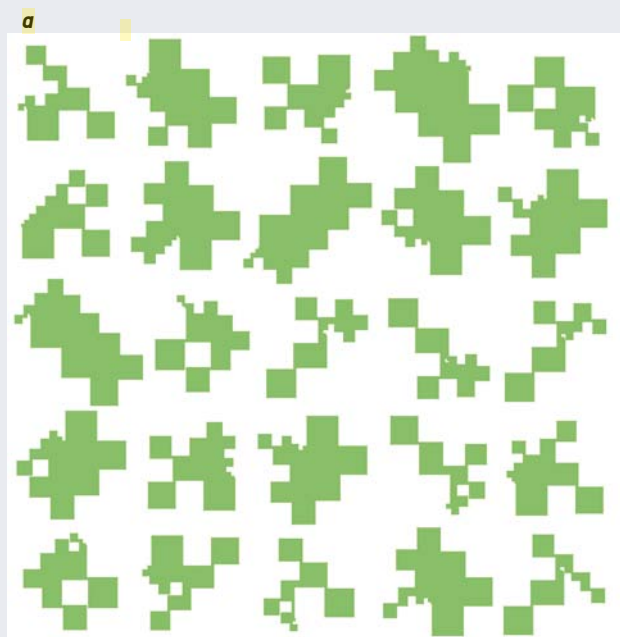
4) Les côtés horizontaux ont pour longueur 2, 4, 6, ..., $2m$. Le total de ces longueurs est $2 + 4 + \dots + 2m = 2(1 + 2 + \dots + m) = m(m + 1)$.

5) Quand on suit le périmètre du golygone, certains côtés vont vers la droite, les

autres vers la gauche. La somme des longueurs de ceux qui vont vers la droite est un nombre pair (car c'est une somme de nombres pairs), et elle est égale à la somme des longueurs de ceux qui vont vers la gauche. Il en résulte que $m(m + 1)/2$ est pair, donc que $m(m + 1)$ est multiple de 4.

6) Puisque m est pair, $m + 1$ est impair. D'après (5), m est alors multiple de 4, et $n = 2m$ est donc multiple de 8.

2. Golygones ne se recoupant pas



La plupart des golygones se recoupent. Ceux qui ne se recoupent pas sont plus intéressants, car il leur correspond une promenade ne repassant pas deux fois au même endroit.

Francesco De Comité a récemment battu le record de calcul de ces nombres, en établissant qu'il y a 1259 golygones de ce type à 32 côtés. Un autre programme de L. Weinberg a donné 41381 pour 40 côtés, 1651922 pour 48 côtés et 73 095 122 pour 56 côtés (voir www.lifl.fr/~bogaert/golygones/ pour un programme d  à B. Bogaert qui affiche les résultats). En a sont dessinés les 25 golygones   32 côtés ne se recoupant pas et dont la hauteur égale la largeur. En b sont dessinés les trois golygones   32 côtés ne se recoupant pas et ayant la forme la plus aplatie possible.