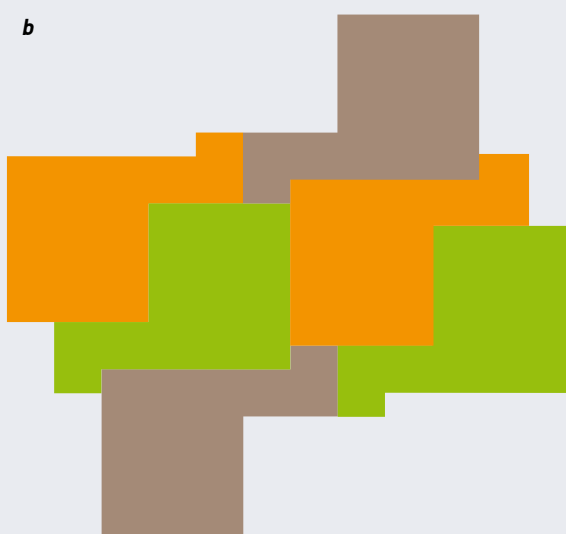
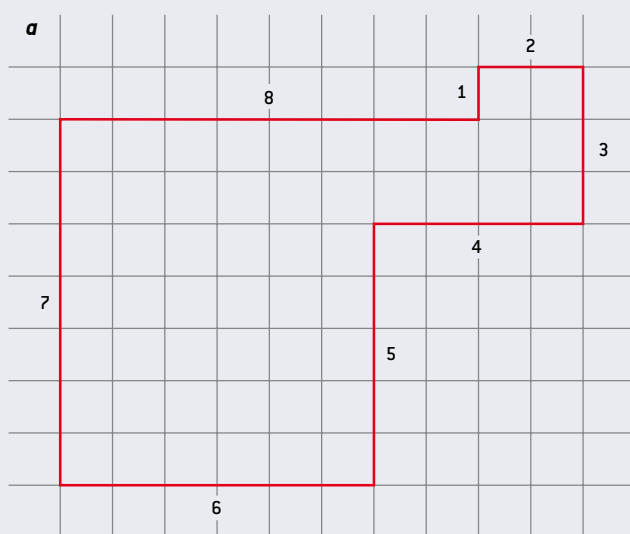


1. Le seul golygone d'ordre 1



Un golygone est un polygone dont tous les côtés sont à angle droit, et ont pour longueur les entiers $1, 2, \dots, n$, dans l'ordre.

Il n'existe qu'un seul golygone à huit côtés (a). C'est le seul golygone connu qui pave le plan (b). Un golygone a nécessairement un nombre de côtés multiple de 8.

Voici la démonstration en six petites étapes de cette affirmation.

1) Donnons-nous un golygone ayant n côtés. Il est clair que n est pair, car il y a autant de segments horizontaux que de segments verticaux : $n = 2m$.

2) Supposons (sans perte de généralité) que le côté de longueur 1 est vertical. Les côtés verticaux (ils alternent avec les côtés horizontaux) ont pour longueur $1, 3, \dots, 2m - 1$. La somme de leurs longueurs est donc $1 + 3 + \dots + (2m - 1) = m^2$.

3) Ce nombre, m^2 , est pair car la somme des longueurs des côtés qui montent est égale à la somme des longueurs des côtés qui descendent. Donc m lui-même est pair.

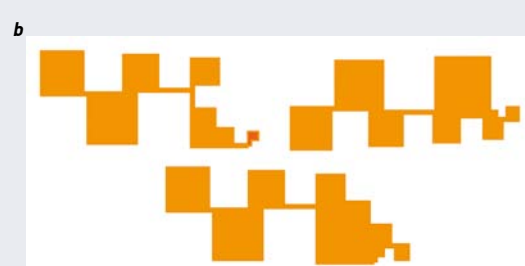
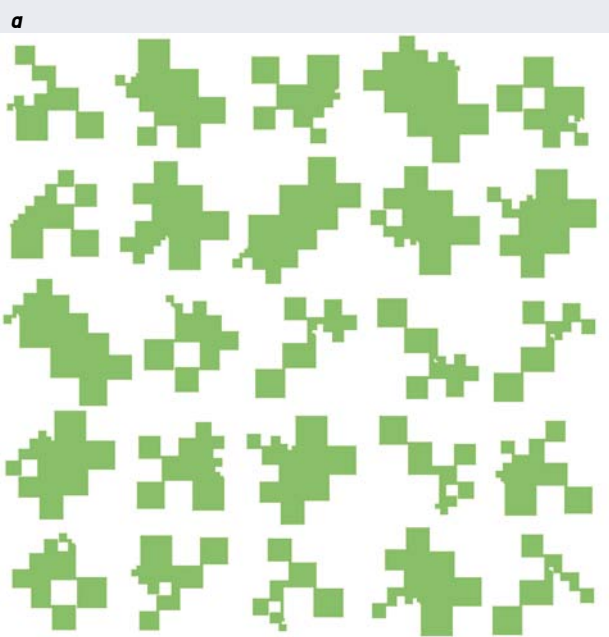
4) Les côtés horizontaux ont pour longueur $2, 4, 6, \dots, 2m$. Le total de ces longueurs est $2 + 4 + \dots + 2m = 2(1 + 2 + \dots + m) = m(m + 1)$.

5) Quand on suit le périmètre du golygone, certains côtés vont vers la droite, les

autres vers la gauche. La somme des longueurs de ceux qui vont vers la droite est un nombre pair (car c'est une somme de nombres pairs), et elle est égale à la somme des longueurs de ceux qui vont vers la gauche. Il en résulte que $m(m + 1)/2$ est pair, donc que $m(m + 1)$ est multiple de 4.

6) Puisque m est pair, $m + 1$ est impair. D'après (5), m est alors multiple de 4, et $n = 2m$ est donc multiple de 8.

2. Golygones ne se recoupant pas

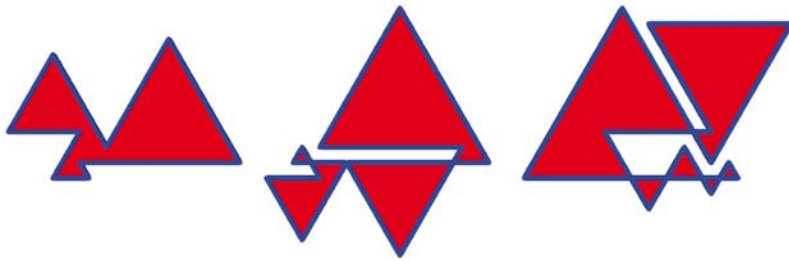


La plupart des golygones se recoupent. Ceux qui ne se recoupent pas sont plus intéressants, car il leur correspond une promenade ne repassant pas deux fois au même endroit.

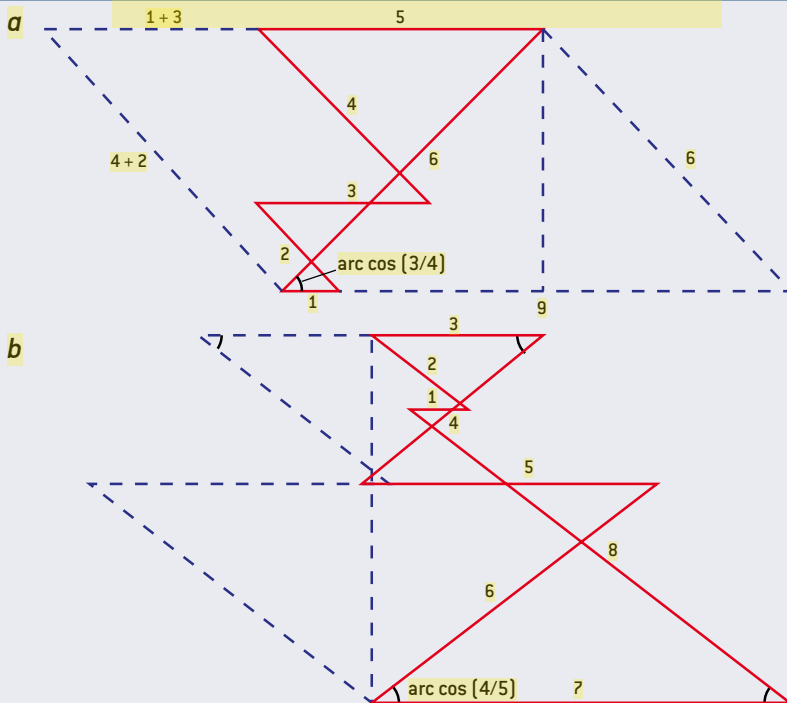
Francesco De Comité a récemment battu le record de calcul de ces nombres, en établissant qu'il y a 1259 golygones de ce type à 32 côtés. Un autre programme de L. Weinberg a donné 41 381 pour 40 côtés, 1651922 pour 48 côtés et 73 095 122 pour 56 côtés (voir www.lifl.fr/~bogaert/golygones/ pour un programme d  à B. Bogaert qui affiche les résultats). En a sont dessinés les 25 golygones   32 côtés ne se recoupant pas et dont la hauteur égale la largeur. En b sont dessinés les trois golygones   32 côtés ne se recoupant pas et ayant la forme la plus aplatie possible.

3. Les alpha-golygones

Si on remplace les angles 90° et -90° , qui sont les seuls autorisés pour un golygone, par des angles α (alpha) et $-\alpha$, on obtient des « α -golygones ». Pour $\alpha = 60^\circ$, la recherche de petits α -golygones donne des résultats intéressants. Les trois plus petits (trouvés par Lee Sallows) sont représentés ici. Le nombre de leurs côtés est, respectivement, 9, 11 et 12.



4. Le plus simple des alpha-golygones



Lee Sallows a recherché le α -golygone ayant le minimum de côtés. Il a procédé à l'aide d'un programme qui essayait un grand nombre de cas en variant l'angle α selon des valeurs régulièrement espacées. Le programme retenait les formes presque fermées où le dernier point était très proche du point de départ. Ensuite, à la main, et par des raisonnements géométriques, L. Sallows a identifié le gagnant. Encore un cas où l'ordinateur aide à résoudre un problème, mais où le raisonnement du mathématicien reste nécessaire. Le gagnant (a) est un α -golygone à six côtés avec $\alpha = \arccos(3/4)$. Les α -golygones records qui arrivent juste derrière le gagnant à six côtés sont deux golygones à huit côtés, celui déjà rencontré dans l'encadré 1 pour $\alpha = 90^\circ$ et un α -golygone à huit côtés (b) pour $\alpha = \arccos(4/5)$.

qu'aller plus loin était hors de portée du programme dont ils disposaient.

Francesco De Comité et Léopold Weinberg, du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille, se sont dit qu'avec les machines actuelles, ils pourraient calculer $b(4)$. F. De Comité a trouvé $b(4) = 1\,259$. La vérification menée par L. Weinberg avec un programme totalement diff rent donne le même résultat. Le programme de L. Weinberg a permis de calculer $b(5) = 41\,381$ (40 côtés), $b(6) = 1\,651\,922$ (48 côtés) et $b(7) = 73\,095\,122$ (56 côtés).

Il est possible qu'en perfectionnant ces programmes de décompte et en utilisant des moyens de calculs plus puissants (par exemple un réseau d'ordinateurs), on puisse calculer $b(8)$, et peut-être $b(9)$. Si un lecteur de *Pour la Science* se lance dans l'aventure et réussit, je signalerai ses résultats dans une rubrique prochaine. Dans l'encadré 2, F. De Comité a représenté quelques-uns des golygones   32 côtés ne se recoupant pas. Il a choisi de dessiner ceux qui ont les formes les moins aplat es et ceux ayant les formes les plus aplat es.

La question de savoir si, parmi les golygones ne se recoupant pas, il y en a d'autres que celui d'ordre 1 qui pavent le plan, n'est pas résolue aujourd'hui. Il est probable que la réponse soit négative, car les contraintes sur les longueurs des côtés semblent rendre impossible la conception d'un pavage sans trou ni recouvrement. Une autre question intéressante, mais elle aussi délicate, est celle-ci : peut-on trouver plusieurs golygones d'ordre n qui, collectivement, pavent le plan ?

Une variante avec des nombres premiers ?

Au lieu de considérer la suite 1, 2, 3, ..., n pour les longueurs des côtés, prenons la suite des nombres premiers jusqu'à un nombre premier p . Nous nous posons alors un nouveau problème qui n'a, nous allons voir pourquoi, aucune solution, car la suite 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... ne comporte qu'un seul nombre pair, 2. Voici la démonstration de cette affirmation en cinq petites étapes.

a) Le nombre de côtés horizontaux et le nombre de côtés verticaux d'un golygone