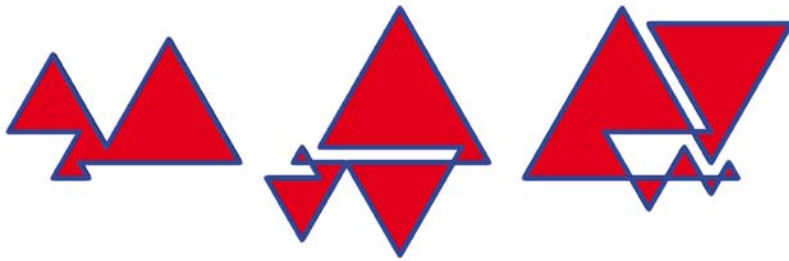
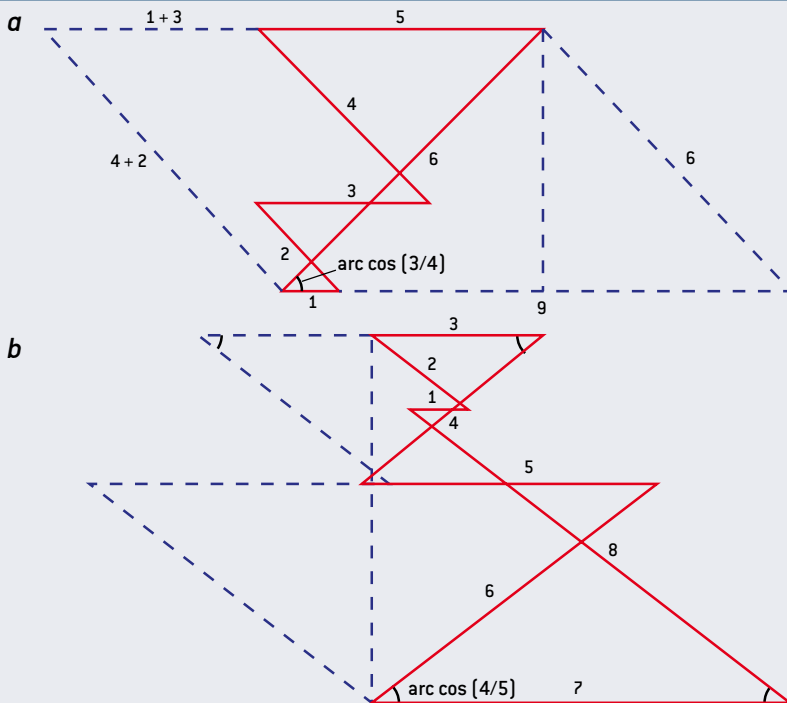


3. Les alpha-golygones

Si on remplace les angles 90° et -90° , qui sont les seuls autorisés pour un golygone, par des angles α (alpha) et $-\alpha$, on obtient des « α -golygones ». Pour $\alpha = 60^\circ$, la recherche de petits α -golygones donne des résultats intéressants. Les trois plus petits (trouvés par Lee Sallows) sont représentés ici. Le nombre de leurs côtés est, respectivement, 9, 11 et 12.



4. Le plus simple des alpha-golygones



Lee Sallows a recherché le α -golygone ayant le minimum de côtés. Il a procédé à l'aide d'un programme qui essayait un grand nombre de cas en variant l'angle α selon des valeurs régulièrement espacées. Le programme retenait les formes presque fermées où le dernier point était très proche du point de départ. Ensuite, à la main, et par des raisonnements géométriques, L. Sallows a identifié le gagnant. Encore un cas où l'ordinateur aide à résoudre un problème, mais où le raisonnement du mathématicien reste nécessaire. Le gagnant (a) est un α -golygone à six côtés avec $\alpha = \arccos(3/4)$. Les α -golygones records qui arrivent juste derrière le gagnant à six côtés sont deux golygones à huit côtés, celui déjà rencontré dans l'encadré 1 pour $\alpha = 90^\circ$ et un α -golygone à huit côtés (b) pour $\alpha = \arccos(4/5)$.

qu'aller plus loin était hors de portée du programme dont ils disposaient.

Francesco De Comit  et Léopold Weinberg, du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille, se sont dit qu'avec les machines actuelles, ils pourraient calculer $b(4)$. F. De Comit  a trouvé $b(4) = 1\,259$. La vérification menée par L. Weinberg avec un programme totalement diff rent donne le même résultat. Le programme de L. Weinberg a permis de calculer $b(5) = 41\,381$ (40 côtés), $b(6) = 1\,651\,922$ (48 côtés) et $b(7) = 73\,095\,122$ (56 côtés).

Il est possible qu'en perfectionnant ces programmes de décompte et en utilisant des moyens de calculs plus puissants (par exemple un réseau d'ordinateurs), on puisse calculer $b(8)$, et peut-être $b(9)$. Si un lecteur de *Pour la Science* se lance dans l'aventure et réussit, je signalerai ses résultats dans une rubrique prochaine. Dans l'encadré 2, F. De Comit  a représenté quelques-uns des golygones   32 côtés ne se recoupant pas. Il a choisi de dessiner ceux qui ont les formes les moins aplaties et ceux ayant les formes les plus aplaties.

La question de savoir si, parmi les golygones ne se recoupant pas, il y en a d'autres que celui d'ordre 1 qui pavent le plan, n'est pas résolue aujourd'hui. Il est probable que la réponse soit négative, car les contraintes sur les longueurs des côtés semblent rendre impossible la conception d'un pavage sans trou ni recouvrement. Une autre question intéressante, mais elle aussi délicate, est celle-ci : peut-on trouver plusieurs golygones d'ordre n qui, collectivement, pavent le plan ?

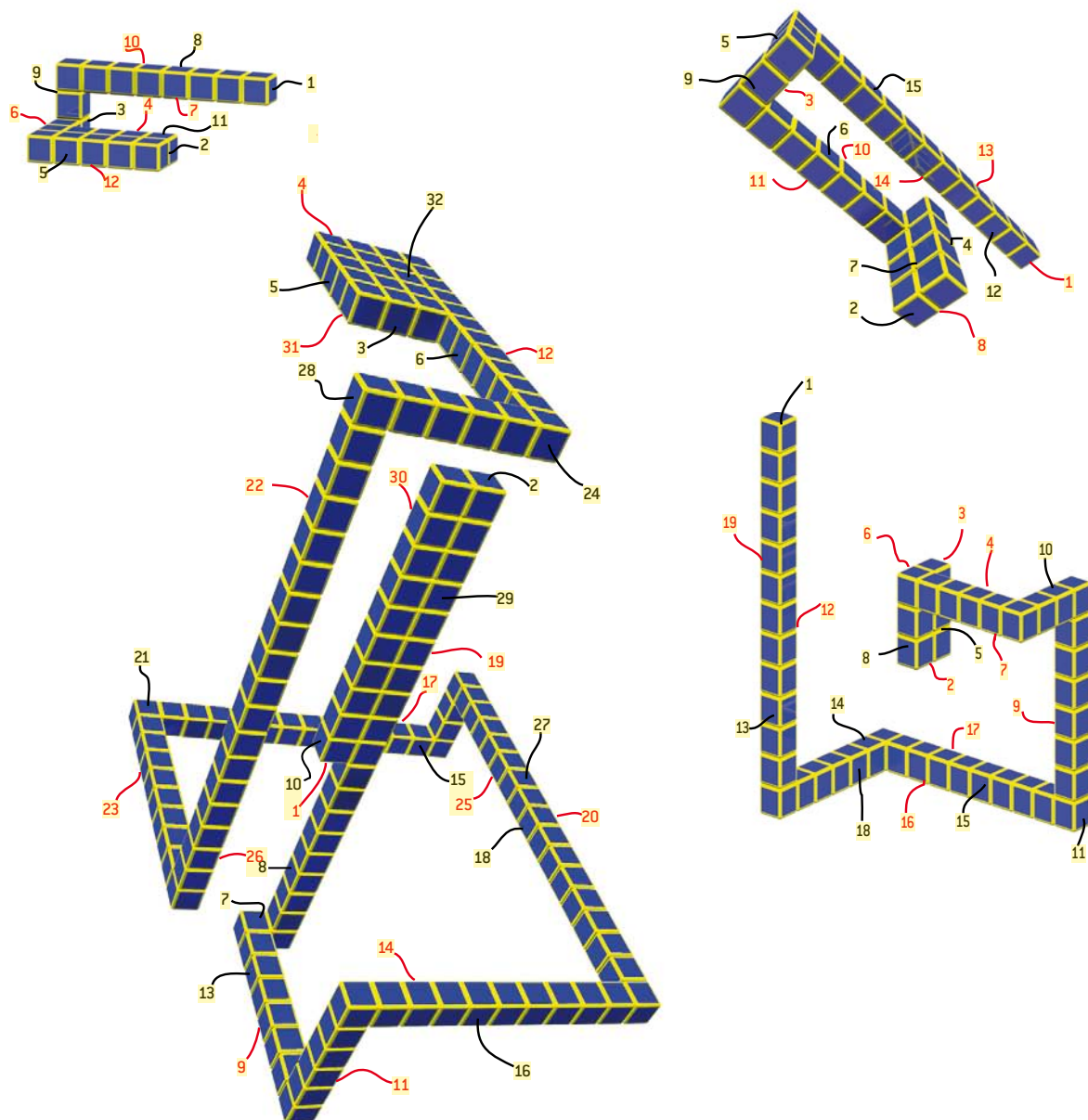
Une variante avec des nombres premiers ?

Au lieu de considérer la suite 1, 2, 3, ..., n pour les longueurs des côtés, prenons la suite des nombres premiers jusqu'à un nombre premier p . Nous nous posons alors un nouveau problème qui n'a, nous allons voir pourquoi, aucune solution, car la suite 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... ne comporte qu'un seul nombre pair, 2. Voici la démonstration de cette affirmation en cinq petites étapes.

a) Le nombre de côtés horizontaux et le nombre de côtés verticaux d'un golygone

5. Les quatre golyèdres connus

Adaptant la définition des polygones à la troisième dimension, le mathématicien Joseph O'Rourke a proposé de s'intéresser aux golyèdres. Par définition, les golyèdres sont les polyèdres obtenus en collant face contre face des cubes identiques de côté unité, et dont les faces ont pour aires les entiers successifs $1, 2, \dots, n$. On a démontré qu'il ne peut pas exister de golyèdres à moins de 11 faces (voir l'encadré 6). Aujourd'hui, on en connaît seulement quatre, qui ont respectivement 12, 15, 19 et 32 faces. Ils ont tous été découverts en avril et mai 2014. Francesco De Comitè, un des acteurs de l'aventure des golygones, les a représentés (les aires des faces indiquées ici en rouge correspondent aux faces non visibles sur le dessin).



6. Le nombre minimal de faces est 11 ou 12

Les golygones ont un nombre de côtés qui est nécessairement un multiple de 8 (voir l'encadré 1). De même, le nombre de faces d'un golyèdre ne peut pas être n'importe quel entier. On sait aujourd'hui que c'est nécessairement un nombre de la forme $4k$ ou $4k+3$ et que ce nombre est supérieur à 10. Dit autrement, les seules valeurs possibles pour le nombre de faces d'un golyèdre sont les nombres de la suite : 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 35, ..., $4k$, $4k+3$, ... Voici, en six étapes, le raisonnement qui justifie cette affirmation.

a) L'aire totale d'un golyèdre est nécessairement un nombre pair.

Tout golyèdre peut être obtenu en ajoutant, un à un, des cubes à un cube initial. Or, à chaque fois qu'on ajoute un cube, la parité du nombre de faces de cubes composant la surface du polyèdre obtenu reste constante. En effet, si le nouveau cube est collé sur une face seulement, alors il en cache 1 et en ajoute 5, ce qui fait une augmentation de 4 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par deux faces, il en cache 2, et en ajoute 4, ce qui fait une augmentation de 2 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par trois faces, il en cache 3 et en ajoute 3 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par 4 faces, il en cache 4 et en ajoute 2 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par 5 faces, il en cache 5 et en ajoute 1 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé en 6 faces, il en cache 6 ; la parité est conservée. Au départ, il y a un seul cube, donc 6 faces. Puisque 6 est pair et que la parité est conservée à chaque ajout, l'aire totale du polyèdre obtenu est paire.

b) Le nombre de faces d'un golyèdre est de la forme $4k$ ou $4k+3$.

La somme des entiers de 1 jusqu'à n , $S(n) = 1 + 2 + \dots + n$, vaut $n(n+1)/2$.

Si $n = 4k$, la somme vaut $4k(4k+1)/2 = 2k(4k+1)$, qui est un nombre pair. Si $n = 4k+1$, la somme $S(n)$ vaut $(4k+1)(4k+2)/2 = (4k+1)(2k+1)$, qui est un nombre impair (car produit de deux nombres impairs). Cela ne pourra convenir pour un golyèdre qui, d'après (a), est nécessairement d'aire totale paire. Si $n = 4k+2$, la somme $S(n)$ vaut $(4k+2)(4k+3)/2 = (2k+1)(4k+3)$. Ce nombre est impair et ne peut donc pas convenir pour un golyèdre. Enfin, si $n = 4k+3$, la somme vaut $(4k+3)(4k+4)/2 = (4k+3)(2k+2)$, un nombre pair.

c) Il y a six types de faces.

Les polyèdres composés de cubes identiques collés par leurs faces ont des faces qui sont des polygones composés de carrés identiques collés par leurs côtés, et tous ces polyèdres ont six types de faces.

En effet, il y a deux types de faces parallèles au plan xy (déterminés par les axes Ox et Oy) selon que la normale à la face est orientée comme Oz , ou en sens inverse. Notons ces deux types de faces $xy/z+$ et $xy/z-$.

De même, il y a deux sortes de faces parallèles au plan xz ($xz/y+$, $xz/y-$), et deux sortes de faces parallèles au plan yz ($yz/x+$ et $yz/x-$).

d) La somme des aires des faces $xy/z+$ est égale à la somme des aires des faces $xy/z-$. De même avec $xz/y+$ et $xz/y-$, et avec $yz/x+$ et $yz/x-$.

Cette propriété se démontre en remarquant que l'égalité (entre les aires des faces $xy/z+$ et $xy/z-$) se conserve quand, partant d'un assemblage de cubes qui la vérifie, on en ajoute un nouveau collé à l'assemblage (analogue au raisonnement (a)).

e) Il faut au moins trois faces différentes parallèles au plan xy , car s'il n'y en a que deux, il y en a une de type $xy/z-$ et une de type $xy/z+$ qui, d'après ce qu'on vient de voir, ont la même aire, ce qui est impossible puisque dans un golyèdre toutes les faces ont des aires différentes. De même, il faut trois faces différentes parallèles au plan xz , et trois faces différentes parallèles au plan yz . Cela montre qu'un golyèdre a au moins 9 faces.

f) Les nombres 9 et 10 ne sont pas possibles d'après (b). Un golyèdre a donc au moins 11 faces et le nombre de faces possibles est donné par la suite : 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 35, ..., $4k$, $4k+3$, ...

sont égaux, car en suivant le golygone, on alterne côtés horizontaux et côtés verticaux.

b) La somme des longueurs des côtés horizontaux est paire, car en suivant le périmètre, on se déplace autant vers la droite que vers la gauche. De même, la somme des longueurs des côtés verticaux est paire.

c) S'il existait un golyèdre dont les longueurs des côtés soient les nombres premiers jusqu'à p ($2, 3, 5, 7, \dots, p$), avec le segment de longueur 2 horizontal (ce qu'on peut supposer sans perte de généralité), alors il faudrait que le nombre de segments horizontaux soit impair pour que la somme de leurs longueurs soit paire (on commence par 2 et ensuite il faut un nombre pair de nombres premiers, pour que la somme soit paire).

d) Cela entraînerait que le nombre de segments verticaux serait impair et donc que la somme des longueurs des segments verticaux serait impaire (une somme d'un nombre impair de nombres impairs est impaire), ce qui est contraire à ce que nous avons vu en (b).

e) Il n'existe donc pas de golygones ayant la suite des nombres premiers jusqu'à p ($2, 3, 5, 7, \dots, p$) comme longueurs des côtés.

Qu'à cela ne tienne : Harry Smith a proposé de remplacer le 2 par un 1 et a trouvé des solutions. Pour 16 côtés, il y en a deux qui sont (avec une notation évidente) :

– 1N 3E 5N 7O 11N 13O 17N 19E 23N 29O 31N 37E 41S 43E 47S 53O

– 1N 3E 5S 7O 11S 13O 17N 19E 23N 29O 31S 37E 41S 43E 47N 53O.

Changer les angles : les alpha-golygones

Une autre variante du problème des golygones s'obtient en remplaçant les seuls angles $+90^\circ$ et -90° autorisés entre deux côtés consécutifs par d'autres angles. L. Sallows a étudié en profondeur cette question. Il a par exemple recherché les « golygones » ayant les angles 60° et -60° (voir l'encadré 3). Un remarquable résultat a été démontré par Hans Cornet, un professeur de mathématiques à la retraite, concernant la variante avec les angles. En voici l'énoncé : pour tout angle α (alpha) de la forme $(n/d) 360^\circ$ avec n et d entiers, il existe des polygones dont les angles de