

6. Le nombre minimal de faces est 11 ou 12

Les golygones ont un nombre de côtés qui est nécessairement un multiple de 8 (voir l'encadré 1). De même, le nombre de faces d'un golyèdre ne peut pas être n'importe quel entier. On sait aujourd'hui que c'est nécessairement un nombre de la forme $4k$ ou $4k + 3$ et que ce nombre est supérieur à 10. Dit autrement, les seules valeurs possibles pour le nombre de faces d'un golyèdre sont les nombres de la suite :

11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 35, ..., $4k$, $4k + 3$, ... Voici, en six étapes, le raisonnement qui justifie cette affirmation.

a) L'aire totale d'un golyèdre est nécessairement un nombre pair.

Tout golyèdre peut être obtenu en ajoutant, un à un, des cubes à un cube initial. Or, à chaque fois qu'on ajoute un cube, la parité du nombre de faces de cubes composant la surface du polyèdre obtenu reste constante. En effet, si le nouveau cube est collé sur une face seulement, alors il en cache 1 et en ajoute 5, ce qui fait une augmentation de 4 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par deux faces, il en cache 2, et en ajoute 4, ce qui fait une augmentation de 2 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par trois faces, il en cache 3 et en ajoute 3 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par 4 faces, il en cache 4 et en ajoute 2 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par 5 faces, il en cache 5 et en ajoute 1 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé en 6 faces, il en cache 6 ; la parité est conservée. Au départ, il y a un seul cube, donc 6 faces. Puisque 6 est pair et que la parité est conservée à chaque ajout, l'aire totale du polyèdre obtenu est paire.

b) Le nombre de faces d'un golyèdre est de la forme $4k$ ou $4k + 3$.

La somme des entiers de 1 jusqu'à n , $S(n) = 1 + 2 + \dots + n$, vaut $n(n+1)/2$.

Si $n = 4k$, la somme vaut $4k(4k+1)/2 = 2k(4k+1)$, qui est un nombre pair. Si $n = 4k + 1$, la somme $S(n)$ vaut $(4k+1)(4k+2)/2 = (4k+1)(2k+1)$, qui est un nombre impair (car produit de deux nombres impairs). Cela ne pourra convenir pour un golyèdre qui, d'après (a), est nécessairement d'aire totale paire. Si $n = 4k + 2$, la somme $S(n)$ vaut $(4k+2)(4k+3)/2 = (2k+1)(4k+3)$. Ce nombre est impair et ne peut donc pas convenir pour un golyèdre. Enfin, si $n = 4k + 3$, la somme vaut $(4k+3)(4k+4)/2 = (4k+3)(2k+2)$, un nombre pair.

c) Il y a six types de faces.

Les polyèdres composés de cubes identiques collés par leurs faces ont des faces qui sont des polygones composés de carrés identiques collés par leurs côtés, et tous ces polyèdres ont six types de faces.

En effet, il y a deux types de faces parallèles au plan xy (déterminés par les axes Ox et Oy) selon que la normale à la face est orientée comme Oz , ou en sens inverse. Notons ces deux types de faces $xy/z+$ et $xy/z-$.

De même, il y a deux sortes de faces parallèles au plan xz ($xz/y+$, $xz/y-$), et deux sortes de faces parallèles au plan yz ($yz/x+$ et $yz/x-$).

d) La somme des aires des faces $xy/z+$ est égale à la somme des aires des faces $xy/z-$.

De même avec $xz/y+$ et $xz/y-$, et avec $yz/x+$ et $yz/x-$.

Cette propriété se démontre en remarquant que l'égalité (entre les aires des faces $xy/z+$ et $xy/z-$) se conserve quand, partant d'un assemblage de cubes qui la vérifie, on en ajoute un nouveau collé à l'assemblage (analogie au raisonnement (a)).

e) Il faut au moins trois faces différentes parallèles au plan xy , car s'il n'y en a que deux, il y en a une de type $xy/z-$ et une de type $xy/z+$ qui, d'après ce qu'on vient de voir, ont la même aire, ce qui est impossible puisque dans un golyèdre toutes les faces ont des aires différentes. De même, il faut trois faces différentes parallèles au plan xz , et trois faces différentes parallèles au plan yz . Cela montre qu'un golyèdre a au moins 9 faces.

f) Les nombres 9 et 10 ne sont pas possibles d'après (b). Un golyèdre a donc au moins 11 faces et le nombre de faces possibles est donné par la suite : 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 35, ..., $4k$, $4k + 3$, ...

sont égaux, car en suivant le golygone, on alterne côtés horizontaux et côtés verticaux.

b) La somme des longueurs des côtés horizontaux est paire, car en suivant le périmètre, on se déplace autant vers la droite que vers la gauche. De même, la somme des longueurs des côtés verticaux est paire.

c) S'il existait un golyèdre dont les longueurs des côtés soient les nombres premiers jusqu'à p ($2, 3, 5, 7, \dots, p$), avec le segment de longueur 2 horizontal (ce qu'on peut supposer sans perte de généralité), alors il faudrait que le nombre de segments horizontaux soit impair pour que la somme de leurs longueurs soit paire (on commence par 2 et ensuite il faut un nombre pair de nombres premiers, pour que la somme soit paire).

d) Cela entraînerait que le nombre de segments verticaux serait impair et donc que la somme des longueurs des segments verticaux serait impaire (une somme d'un nombre impair de nombres impairs est impaire), ce qui est contraire à ce que nous avons vu en (b).

e) Il n'existe donc pas de golygones ayant la suite des nombres premiers jusqu'à p ($2, 3, 5, 7, \dots, p$) comme longueurs des côtés.

Qu'à cela ne tienne : Harry Smith a proposé de remplacer le 2 par un 1 et a trouvé des solutions. Pour 16 côtés, il y en a deux qui sont (avec une notation évidente) :

– 1N 3E 5N 7O 11N 13O 17N 19E 23N 29O 31N 37E 41S 43E 47S 53O

– 1N 3E 5S 7O 11S 13O 17N 19E 23N 29O 31S 37E 41S 43E 47N 53O.

Changer les angles : les alpha-golygones

Une autre variante du problème des golygones s'obtient en remplaçant les seuls angles $+90^\circ$ et -90° autorisés entre deux côtés consécutifs par d'autres angles. L. Sallows a étudié en profondeur cette question. Il a par exemple recherché les « golygones » ayant les angles 60° et -60° (voir l'encadré 3). Un remarquable résultat a été démontré par Hans Cornet, un professeur de mathématiques à la retraite, concernant la variante avec les angles. En voici l'énoncé : pour tout angle α (alpha) de la forme $(n/d) 360^\circ$ avec n et d entiers, il existe des polygones dont les angles de