

6. Le nombre minimal de faces est 11 ou 12

Les golygones ont un nombre de côtés qui est nécessairement un multiple de 8 (voir l'encadré 1). De même, le nombre de faces d'un golyèdre ne peut pas être n'importe quel entier. On sait aujourd'hui que c'est nécessairement un nombre de la forme $4k$ ou $4k + 3$ et que ce nombre est supérieur à 10. Dit autrement, les seules valeurs possibles pour le nombre de faces d'un golyèdre sont les nombres de la suite :

11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 35, ..., $4k$, $4k + 3$, ... Voici, en six étapes, le raisonnement qui justifie cette affirmation.

a) L'aire totale d'un golyèdre est nécessairement un nombre pair.

Tout golyèdre peut être obtenu en ajoutant, un à un, des cubes à un cube initial. Or, à chaque fois qu'on ajoute un cube, la parité du nombre de faces de cubes composant la surface du polyèdre obtenu reste constante. En effet, si le nouveau cube est collé sur une face seulement, alors il en cache 1 et en ajoute 5, ce qui fait une augmentation de 4 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par deux faces, il en cache 2, et en ajoute 4, ce qui fait une augmentation de 2 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par trois faces, il en cache 3 et en ajoute 3 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par 4 faces, il en cache 4 et en ajoute 2 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé par 5 faces, il en cache 5 et en ajoute 1 ; la parité est conservée. Si le nouveau cube est collé en 6 faces, il en cache 6 ; la parité est conservée. Au départ, il y a un seul cube, donc 6 faces. Puisque 6 est pair et que la parité est conservée à chaque ajout, l'aire totale du polyèdre obtenu est paire.

b) Le nombre de faces d'un golyèdre est de la forme $4k$ ou $4k + 3$.

La somme des entiers de 1 jusqu'à n , $S(n) = 1 + 2 + \dots + n$, vaut $n(n+1)/2$.

Si $n = 4k$, la somme vaut $4k(4k+1)/2 = 2k(4k+1)$, qui est un nombre pair. Si $n = 4k + 1$, la somme $S(n)$ vaut $(4k+1)(4k+2)/2 = (4k+1)(2k+1)$, qui est un nombre impair (car produit de deux nombres impairs). Cela ne pourra convenir pour un golyèdre qui, d'après (a), est nécessairement d'aire totale paire. Si $n = 4k + 2$, la somme $S(n)$ vaut $(4k+2)(4k+3)/2 = (2k+1)(4k+3)$. Ce nombre est impair et ne peut donc pas convenir pour un golyèdre. Enfin, si $n = 4k + 3$, la somme vaut $(4k+3)(4k+4)/2 = (4k+3)(2k+2)$, un nombre pair.

c) Il y a six types de faces.

Les polyèdres composés de cubes identiques collés par leurs faces ont des faces qui sont des polygones composés de carrés identiques collés par leurs côtés, et tous ces polyèdres ont six types de faces.

En effet, il y a deux types de faces parallèles au plan xy (déterminés par les axes Ox et Oy) selon que la normale à la face est orientée comme Oz , ou en sens inverse. Notons ces deux types de faces $xy/z+$ et $xy/z-$.

De même, il y a deux sortes de faces parallèles au plan xz ($xz/y+$, $xz/y-$), et deux sortes de faces parallèles au plan yz ($yz/x+$ et $yz/x-$).

d) La somme des aires des faces $xy/z+$ est égale à la somme des aires des faces $xy/z-$. De même avec $xz/y+$ et $xz/y-$, et avec $yz/x+$ et $yz/x-$.

Cette propriété se démontre en remarquant que l'égalité (entre les aires des faces $xy/z+$ et $xy/z-$) se conserve quand, partant d'un assemblage de cubes qui la vérifie, on en ajoute un nouveau collé à l'assemblage (analogue au raisonnement (a)).

e) Il faut au moins trois faces différentes parallèles au plan xy , car s'il n'y en a que deux, il y en a une de type $xy/z-$ et une de type $xy/z+$ qui, d'après ce qu'on vient de voir, ont la même aire, ce qui est impossible puisque dans un golyèdre toutes les faces ont des aires différentes. De même, il faut trois faces différentes parallèles au plan xz , et trois faces différentes parallèles au plan yz . Cela montre qu'un golyèdre a au moins 9 faces.

f) Les nombres 9 et 10 ne sont pas possibles d'après (b). Un golyèdre a donc au moins 11 faces et le nombre de faces possibles est donné par la suite : 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 35, ..., $4k$, $4k + 3$, ...

sont égaux, car en suivant le golygone, on alterne côtés horizontaux et côtés verticaux.

b) La somme des longueurs des côtés horizontaux est paire, car en suivant le périmètre, on se déplace autant vers la droite que vers la gauche. De même, la somme des longueurs des côtés verticaux est paire.

c) S'il existait un golyèdre dont les longueurs des côtés soient les nombres premiers jusqu'à p ($2, 3, 5, 7, \dots, p$), avec le segment de longueur 2 horizontal (ce qu'on peut supposer sans perte de généralité), alors il faudrait que le nombre de segments horizontaux soit impair pour que la somme de leurs longueurs soit paire (on commence par 2 et ensuite il faut un nombre pair de nombres premiers, pour que la somme soit paire).

d) Cela entraînerait que le nombre de segments verticaux serait impair et donc que la somme des longueurs des segments verticaux serait impaire (une somme d'un nombre impair de nombres impairs est impaire), ce qui est contraire à ce que nous avons vu en (b).

e) Il n'existe donc pas de golygones ayant la suite des nombres premiers jusqu'à p ($2, 3, 5, 7, \dots, p$) comme longueurs des côtés.

Qu'à cela ne tienne : Harry Smith a proposé de remplacer le 2 par un 1 et a trouvé des solutions. Pour 16 côtés, il y en a deux qui sont (avec une notation évidente) :

– 1N 3E 5N 7O 11N 13O 17N 19E 23N 29O 31N 37E 41S 43E 47S 53O

– 1N 3E 5S 7O 11S 13O 17N 19E 23N 29O 31S 37E 41S 43E 47N 53O.

Changer les angles : les alpha-golygones

Une autre variante du problème des golygones s'obtient en remplaçant les seuls angles $+90^\circ$ et -90° autorisés entre deux côtés consécutifs par d'autres angles. L. Sallows a étudié en profondeur cette question. Il a par exemple recherché les « golygones » ayant les angles 60° et -60° [voir l'encadré 3]. Un remarquable résultat a été démontré par Hans Cornet, un professeur de mathématiques à la retraite, concernant la variante avec les angles. En voici l'énoncé : pour tout angle α (alpha) de la forme $(n/d) 360^\circ$ avec n et d entiers, il existe des polygones dont les angles de

deux côtés consécutifs sont α ou $-\alpha$ et dont les longueurs des côtés sont, dans l'ordre, les entiers consécutifs 1, 2, ..., k .

La démonstration ne permet pas d'affirmer l'existence de tels polygones ne se croisant pas. On ne sait pas non plus caractériser les angles pour lesquels ces « α -golygones » existent, mais on sait que d'autres angles que ceux de la forme $(n/d) 360^\circ$ donnent parfois des α -golygones (voir le plus simple d'entre eux dans l'encadré 4).

Après ces recherches menées autour de 1990, un étonnant travail de généralisation en dimension 3 du problème des golygones s'est déroulé au premier semestre 2014.

En 3D : les golyèdres

Le 23 février 2014, Joseph O'Rourke, sur le site *Mathematics Stack Exchange* (<http://math.stackexchange.com/>), puis le 28 avril sur le site *Mathoverflow* (<http://mathoverflow.net/about>) a proposé de rechercher des polyèdres composés de cubes identiques de côté 1 (chaque face a donc une aire unité), collés par leurs faces, et dont les faces (nécessairement des carrés juxtaposés) aient pour aire 1, 2, 3, ..., n . Comme il n'y a pas d'ordre naturel sur les faces de tels polyèdres, aucune contrainte d'ordre des faces n'est imposée. Il a proposé de nommer « golyèdres » ces polyèdres. La question était donc : existe-t-il des golyèdres ? J. O'Rourke conjecturait que la réponse était négative.

Pourtant, le 30 avril 2014, Adam Goucher de *Trinity College* à Cambridge a envoyé un message sur la liste de diffusion *Math-Fun* indiquant qu'il avait trouvé un golyèdre à 32 faces (voir l'encadré 5). Dans un article publié en même temps (<http://cp4space.wordpress.com/2014/04/30/golygons-and-golyhedra/>), il donnait quelques explications sur la méthode mise en œuvre pour trouver ce premier golyèdre. Il indiquait aussi un raisonnement montrant qu'il ne peut pas y avoir de golyèdres à moins de 11 faces, et que le nombre de faces d'un golyèdre est nécessairement de la forme $4k$ ou $4k + 3$ (voir l'encadré 6). Cela laissait ouverte la question : quel est le plus petit entier n pour lequel il existe un golyèdre ayant n faces ?

D'après les contraintes démontrées sur ce plus petit entier, il ne pouvait être que l'un des nombres suivants : 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 31 ou 32.

Le 9 mai 2014, Alexei Nigin proposa un nouveau golyèdre record à 15 faces. Dix jours plus tard, sans battre le record du nombre minimal de faces, un troisième golyèdre fut découvert par Erich Friedman : il a 19 faces. La « taille » minimale d'un golyèdre ne pouvait plus être que 11, 12 ou 15.

À la grande surprise de tous, le 24 mai, A. Nigin découvrit un golyèdre à 12 faces. Ce golyèdre a une étonnante propriété : on peut le construire sans colle en posant des cubes les uns sur les autres. En effet, correctement orienté, le golyèdre se décompose en une série de piles verticales placées côte à côte, chaque pile n'étant composée que d'un cube posé sur le sol et de cubes placés directement sur lui à la verticale.

Aujourd'hui, on connaît donc quatre golyèdres et le nombre minimum de faces d'un golyèdre ne peut plus être que 11 ou 12.

Deux hypothèses sont envisageables. Soit on découvrira un golyèdre à 11 faces et le nombre minimal de faces d'un golyèdre sera donc 11. Soit un raisonnement géométrique ou un calcul établira que 11 n'est pas possible, et le minimum recherché sera donc 12.

D'autres questions restent non résolues :
– Existe-t-il des golyèdres à n faces pour tous les entiers n de la forme $4k$ et $4k + 3$ à partir de 12 ?

– Combien y en a-t-il pour chaque nombre n de faces envisageables ?

– Certains golyèdres pavent-ils l'espace ?

– Si l'on remplace les cubes accolés par des tétraèdres réguliers (ayant quatre triangles équilatéraux pour faces), existe-t-il des golyèdres de ce type ? Si oui, pour quelles valeurs du nombre de faces ? Combien ?

Dans le champ mathématique infini, on rencontre de jolies choses et des problèmes qui défient amateurs et professionnels. Ils obligent parfois à utiliser des ordinateurs, mais ces derniers, pas plus que l'intelligence des meilleurs esprits, ne détiennent de méthodes générales donnant les réponses aux questions qui s'accumulent... parfois plus rapidement que les réponses.

■ L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

■ BIBLIOGRAPHIE

A. Goucher, *Golygons and golyhedra*, 30 avril 2014, <http://tinyurl.com/qfphnze>

J. O'Rourke, *Can we find lattice polyhedra with faces of area 1,2,3,...?*, 28 avril 2014, <http://tinyurl.com/noc28ne>

J. O'Rourke, *Lattice orthogonal polyhedra face-area sequences : Golyhedra ?*, 23 février 2014, <http://tinyurl.com/pnxctnq>

L. Sallows, *New pathways in serial isogons*, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 14(2), pp. 55-67, 1992.

L. Sallows, M. Gardner, R. Guy et D. Knuth, *Serial isogons of 90 degrees*, *Mathematics Magazine*, vol. 64(5), pp. 315-324, 1991.



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr