

deux côtés consécutifs sont α ou $-\alpha$ et dont les longueurs des côtés sont, dans l'ordre, les entiers consécutifs 1, 2, ..., k .

La démonstration ne permet pas d'affirmer l'existence de tels polygones ne se croisant pas. On ne sait pas non plus caractériser les angles pour lesquels ces « α -golygones » existent, mais on sait que d'autres angles que ceux de la forme $(n/d) 360^\circ$ donnent parfois des α -golygones (voir le plus simple d'entre eux dans l'encadré 4).

Après ces recherches menées autour de 1990, un étonnant travail de généralisation en dimension 3 du problème des golygones s'est déroulé au premier semestre 2014.

En 3D : les golyèdres

Le 23 février 2014, Joseph O'Rourke, sur le site *Mathematics Stack Exchange* (<http://math.stackexchange.com/>), puis le 28 avril sur le site *Mathoverflow* (<http://mathoverflow.net/about>) a proposé de rechercher des polyèdres composés de cubes identiques de côté 1 (chaque face a donc une aire unité), collés par leurs faces, et dont les faces (nécessairement des carrés juxtaposés) aient pour aire 1, 2, 3, ..., n . Comme il n'y a pas d'ordre naturel sur les faces de tels polyèdres, aucune contrainte d'ordre des faces n'est imposée. Il a proposé de nommer « golyèdres » ces polyèdres. La question était donc : existe-t-il des golyèdres ? J. O'Rourke conjecturait que la réponse était négative.

Pourtant, le 30 avril 2014, Adam Goucher du *Trinity College* à Cambridge a envoyé un message sur la liste de diffusion *Math-Fun* indiquant qu'il avait trouvé un golyèdre à 32 faces (voir l'encadré 5). Dans un article publié en même temps (<http://cp4space.wordpress.com/2014/04/30/golygons-and-golyhedra/>), il donnait quelques explications sur la méthode mise en œuvre pour trouver ce premier golyèdre. Il indiquait aussi un raisonnement montrant qu'il ne peut pas y avoir de golyèdres à moins de 11 faces, et que le nombre de faces d'un golyèdre est nécessairement de la forme $4k$ ou $4k + 3$ (voir l'encadré 6). Cela laissait ouverte la question : quel est le plus petit entier n pour lequel il existe un golyèdre ayant n faces ?

D'après les contraintes démontrées sur ce plus petit entier, il ne pouvait être que l'un des nombres suivants : 11, 12, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 27, 28, 31 ou 32.

Le 9 mai 2014, Alexei Nigin proposa un nouveau golyèdre record à 15 faces. Dix jours plus tard, sans battre le record du nombre minimal de faces, un troisième golyèdre fut découvert par Erich Friedman : il a 19 faces. La « taille » minimale d'un golyèdre ne pouvait plus être que 11, 12 ou 15.

À la grande surprise de tous, le 24 mai, A. Nigin découvrit un golyèdre à 12 faces. Ce golyèdre a une étonnante propriété : on peut le construire sans colle en posant des cubes les uns sur les autres. En effet, correctement orienté, le golyèdre se décompose en une série de piles verticales placées côte à côte, chaque pile n'étant composée que d'un cube posé sur le sol et de cubes placés directement sur lui à la verticale.

Aujourd'hui, on connaît donc quatre golyèdres et le nombre minimum de faces d'un golyèdre ne peut plus être que 11 ou 12.

Deux hypothèses sont envisageables. Soit on découvrira un golyèdre à 11 faces et le nombre minimal de faces d'un golyèdre sera donc 11. Soit un raisonnement géométrique ou un calcul établira que 11 n'est pas possible, et le minimum recherché sera donc 12.

D'autres questions restent non résolues :
– Existe-t-il des golyèdres à n faces pour tous les entiers n de la forme $4k$ et $4k + 3$ à partir de 12 ?

– Combien y en a-t-il pour chaque nombre n de faces envisageables ?

– Certains golyèdres pavent-ils l'espace ?
– Si l'on remplace les cubes accolés par des tétraèdres réguliers (ayant quatre triangles équilatéraux pour faces), existe-t-il des golyèdres de ce type ? Si oui, pour quelles valeurs du nombre de faces ? Combien ?

Dans le champ mathématique infini, on rencontre de jolies choses et des problèmes qui défient amateurs et professionnels. Ils obligent parfois à utiliser des ordinateurs, mais ces derniers, pas plus que l'intelligence des meilleurs esprits, ne détiennent de méthodes générales donnant les réponses aux questions qui s'accumulent... parfois plus rapidement que les réponses.

L'AUTEUR



J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

BIBLIOGRAPHIE

A. Goucher, *Golygons and golyhedra*, 30 avril 2014, <http://tinyurl.com/qfphnze>

J. O'Rourke, *Can we find lattice polyhedra with faces of area 1,2,3,...?*, 28 avril 2014, <http://tinyurl.com/noc28ne>

J. O'Rourke, *Lattice orthogonal polyhedra face-area sequences : Golyhedra ?*, 23 février 2014, <http://tinyurl.com/pnxctnq>

L. Sallows, *New pathways in serial isogons*, *The Mathematical Intelligencer*, vol. 14(2), pp. 55-67, 1992.

L. Sallows, M. Gardner, R. Guy et D. Knuth, *Serial isogons of 90 degrees*, *Mathematics Magazine*, vol. 64(5), pp. 315-324, 1991.



Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr