

LOGIQUE & CALCUL

Les graphes-allumettes

Les graphes d'un seul tenant et dont toutes les arêtes sont de même longueur peuvent être dessinés en disposant des allumettes sur une table. Ils sont loin d'avoir livré tous leurs secrets.

Jean-Paul DELAHAYE

Avec des allumettes, les amateurs méticuleux fabriquent des sculptures étonnantes. Un exemple est celle réalisée par Patrick Acton, un passionné d'architecture gothique qui vit dans l'Iowa : longue de plus de deux mètres, elle représente la cathédrale Notre-Dame de Paris (*cliché ci-contre*). Cette maquette a exigé 298 000 allumettes, 55 litres de colle et 2000 heures de travail (www.matchstickmarvels.com/the-models/notre-dame-cathedral).

Beaucoup moins d'allumettes suffisent à l'amusement d'un mathématicien. Grâce à elles, il découvre de nouveaux aspects de sa discipline en se posant des problèmes géométriques ou topologiques sur les dessins faisables avec des traits ayant tous la même longueur. Il tente de les traiter à la main en manipulant le contenu d'une boîte d'allumettes. Certaines questions le conduisent à établir de délicats catalogues. D'autres se révèlent plus ardues et créent de véritables sujets de recherche où il ne progresse que lentement.

Quand on dispose des allumettes sur une surface plane sans qu'elles se croisent, en les faisant se toucher par leurs extrémités et en composant une forme d'un seul tenant, on dessine des graphes d'un type particulier. Ce sont les « graphes-allumettes » ou « graphes-unités », car on peut supposer que la longueur d'une allumette fixe l'unité de longueur (*voir des exemples dans l'encadré 1*). L'étude de ces graphes-allumettes est à la

fois ludique et sérieuse ; c'est à elle que le mathématicien se consacrera de préférence aux constructions de cathédrales !

Deux graphes G et G' sont équivalents, ou « isomorphes », s'ils ont le même nombre de sommets et d'arêtes et s'il est possible de nommer les sommets de G et de G' d'une telle façon que les arêtes de G (ce sont des couples de sommets) soient exactement les mêmes que les arêtes de G' . Ainsi, dans l'encadré 1, les graphes a et b sont iso-

(on dit aussi « connexes ») : deux sommets quelconques sont toujours joignables par un chemin qui suit les arêtes.

Une première question intéresse le mathématicien : un nombre d'allumettes étant fixé, par exemple 6, combien existe-t-il de graphes-allumettes (d'un seul tenant) différents, c'est-à-dire non isomorphes ? On notera $a(n)$ ce nombre. Il est facile de déterminer $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(3) = 3$, $a(4) = 5$. Prenez quelques allumettes et amusez-vous à trouver $a(5)$ (*voir l'encadré 1 pour la réponse*).



LA CATHÉDRALE NOTRE-DAME de Paris, maquette construite avec des allumettes.

morphes. En revanche, les graphes a et c ne le sont pas, ni les graphes c et d . Précisons que les graphes dont nous parlerons ici ne sont pas orientés (l'arête xy est considérée identique à l'arête yx), et qu'il ne peut y avoir ni arête d'un sommet vers lui-même (pas d'arête xx), ni deux arêtes reliant deux fois les mêmes sommets (pas d'arcs doubles). Nous ne le préciserons pas à chaque fois, mais nous ne considérerons que des graphes d'un seul tenant

Dénombrements

Les valeurs de $a(n)$ définissent la suite A066951 de l'encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane (<https://oeis.org/A066951>). On ne les connaît que jusqu'à $a(9)$ et cela seulement depuis 2013, grâce à un travail de Raffaele Salvia (<http://arxiv.org/pdf/1303.5965v2.pdf>). Aucune formule n'a été proposée pour $a(n)$.

Un autre décompte est intéressant : parmi les graphes-allumettes (d'un seul tenant) qu'on dessine avec n allumettes, combien sont topologiquement différents ? Cette question admet presque toujours une réponse différente de la première, car deux graphes G et G' sont topologiquement équivalents (on dit aussi « homéomorphes ») si en imaginant que les graphes sont faits de fils en caoutchouc, il est possible de déformer G pour obtenir G' (il ne faut pas se préoccuper des nœuds, mais seulement des

arêtes). Ainsi, les graphes *b* et *c* de l'encadré 1 sont topologiquement équivalents (alors qu'ils ne sont pas isomorphes). En revanche, les graphes *c* et *d* ne sont pas topologiquement équivalents et correspondent à des classes d'homéomorphie distinctes (dessins A et B).

Le second problème de dénombrement consiste à déterminer combien de classes d'homéomorphie différentes on obtient en dessinant des graphes-allumettes (d'un seul tenant) avec n allumettes. Notons $b(n)$ cette suite. On vérifie aisément que $b(1) = 1$, $b(2) = 1$, $b(3) = 3$, $b(4) = 5$. Rien ne change jusque-là par rapport à $a(n)$. Mais $b(5) = 10$ alors que $a(5) = 12$. En effet, comme l'illustre l'encadré 1, certains graphes non isomorphes appartiennent à la même classe d'homéomorphie. La suite $b(n)$ est la suite A003055 (<https://oeis.org/A003055>) de l'encyclopédie de N. Sloane qui propose les $b(n)$ jusqu'à $n = 9$. Là encore, aucune formule générale n'est connue pour $b(n)$.

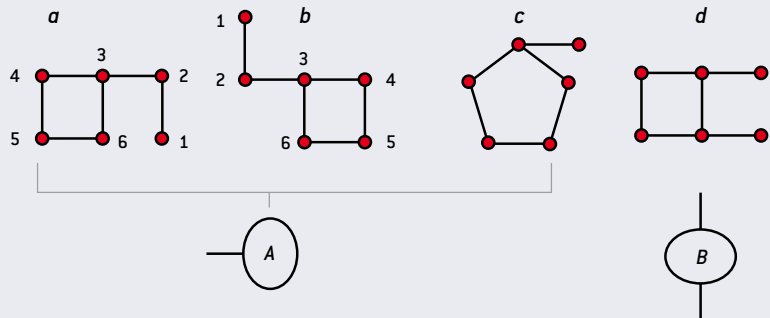
Un joli petit problème que vous pourrez traiter à la main avec seulement six allumettes (de la patience et de la concentration) consiste à retrouver les 28 graphes-allumettes différents qu'on peut faire, et à les regrouper en 19 classes d'homéomorphie. Un défi plus difficile est de mener le même travail pour sept, huit ou neuf allumettes. Vous contrôlerez vos recherches en consultant le récent catalogue publié par R. Salvia.

Les graphes k -réguliers

Calculer un tel catalogue est assez difficile, même avec un ordinateur, car les notions d'isomorphisme de graphes et encore plus d'homéomorphisme de graphes ne se laissent pas facilement programmer. Aller au-delà de $n = 9$ serait un bel exploit et permettrait de compléter le catalogue de R. Salvia et les données de l'encyclopédie des suites numériques. Qui veut essayer ?

Dans un graphe, on nomme « degré d'un sommet » le nombre de ses voisins, c'est-à-dire le nombre d'arêtes dont il est l'extrémité. Par définition, un graphe k -régulier est un graphe dont tous les sommets ont le même degré k . Un tel graphe présente un aspect homogène. Les graphes associés

1. Graphes isomorphes et homéomorphes



n :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a(n)$:	1	1	3	5	12	28	74	207	633
$b(n)$:	1	1	3	5	10	19	39	84	197

—			

Un graphe-allumettes est un graphe d'un seul tenant dessiné sur un plan, dont toutes les arêtes sont des segments de droite de même longueur et qui ne comporte aucun croisement.

Deux graphes sont dits isomorphes si, en changeant le nom des sommets de l'un, on peut les rendre identiques, c'est-à-dire faire qu'ils aient exactement les mêmes arêtes. Les graphes *a* et *b* sont isomorphes, mais pas *a* et *c*, ni *c* et *d*.

Deux graphes sont topologiquement iden-

tiques, on dit « homéomorphes » si, en imaginant que chaque graphe n'est qu'un réseau de fils en caoutchouc parfaitement collés, on peut déformer l'un et obtenir l'autre. Les graphes *a*, *b* et *c* sont homéomorphes. Le graphe *d*, lui, n'est homéomorphe à aucun

des autres. Les dessins A et B représentent les classes d'homéomorphie.

Ci-dessus sont indiqués les 12 différents graphes non isomorphes faisables avec cinq allumettes, qui se regroupent en 10 classes d'homéomorphie.

Le petit tableau indique le nombre $a(n)$ de graphes non isomorphes faisables avec n allumettes sur un plan, et le nombre $b(n)$ de classes d'homéomorphie de ces graphes-allumettes.