

arêtes). Ainsi, les graphes b et c de l'encadré 1 sont topologiquement équivalents (alors qu'ils ne sont pas isomorphes). En revanche, les graphes c et d ne sont pas topologiquement équivalents et correspondent à des classes d'homéomorphie distinctes (dessins A et B).

Le second problème de dénombrement consiste à déterminer combien de classes d'homéomorphie différentes on obtient en dessinant des graphes-allumettes (d'un seul tenant) avec n allumettes. Notons $b(n)$ cette suite. On vérifie aisément que $b(1) = 1$, $b(2) = 1$, $b(3) = 3$, $b(4) = 5$. Rien ne change jusque-là par rapport à $a(n)$. Mais $b(5) = 10$ alors que $a(5) = 12$. En effet, comme l'illustre l'encadré 1, certains graphes non isomorphes appartiennent à la même classe d'homéomorphie. La suite $b(n)$ est la suite A003055 (<https://oeis.org/A003055>) de l'encyclopédie de N. Sloane qui propose les $b(n)$ jusqu'à $n = 9$. Là encore, aucune formule générale n'est connue pour $b(n)$.

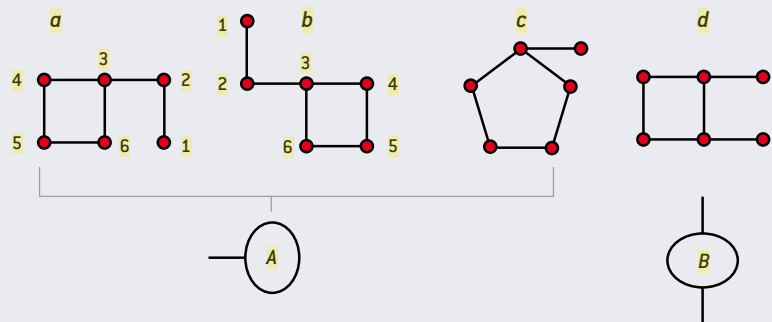
Un joli petit problème que vous pourrez traiter à la main avec seulement six allumettes (de la patience et de la concentration) consiste à retrouver les 28 graphes-allumettes différents qu'on peut faire, et à les regrouper en 19 classes d'homéomorphie. Un défi plus difficile est de mener le même travail pour sept, huit ou neuf allumettes. Vous contrôlerez vos recherches en consultant le récent catalogue publié par R. Salvia.

Les graphes k -réguliers

Calculer un tel catalogue est assez difficile, même avec un ordinateur, car les notions d'isomorphisme de graphes et encore plus d'homéomorphisme de graphes ne se laissent pas facilement programmer. Aller au-delà de $n = 9$ serait un bel exploit et permettrait de compléter le catalogue de R. Salvia et les données de l'encyclopédie des suites numériques. Qui veut essayer ?

Dans un graphe, on nomme « degré d'un sommet » le nombre de ses voisins, c'est-à-dire le nombre d'arêtes dont il est l'extrémité. Par définition, un graphe k -régulier est un graphe dont tous les sommets ont le même degré k . Un tel graphe présente un aspect homogène. Les graphes associés

1. Graphes isomorphes et homéomorphes



$n :$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a(n) :$	1	1	3	5	12	28	74	207	633
$b(n) :$	1	1	3	5	10	19	39	84	197

—		
$\prec$		
$\preceq$		
+		
$\oplus$		

Un graphe-allumettes est un graphe d'un seul tenant dessiné sur un plan, dont toutes les arêtes sont des segments de droite de même longueur et qui ne comporte aucun croisement.

Deux graphes sont dits isomorphes si, en changeant le nom des sommets de l'un, on peut les rendre identiques, c'est-à-dire faire qu'ils aient exactement les mêmes arêtes. Les graphes a et b sont isomorphes, mais pas a et c , ni c et d .

Deux graphes sont topologiquement iden-

tiques, on dit « homéomorphes » si, en imaginant que chaque graphe n'est qu'un réseau de fils en caoutchouc parfaitement collés, on peut déformer l'un et obtenir l'autre. Les graphes a , b et c sont homéomorphes.

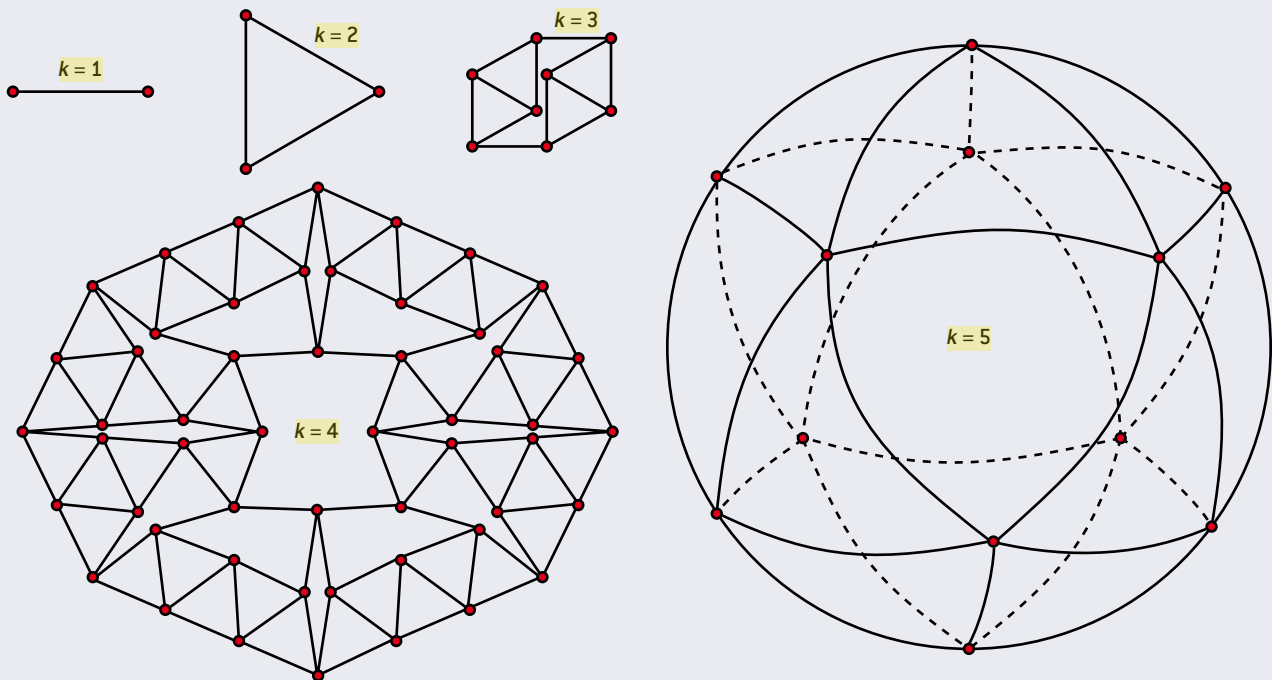
Le graphe d , lui, n'est homéomorphe à aucun

des autres. Les dessins A et B représentent les classes d'homéomorphie.

Ci-dessus sont indiqués les 12 différents graphes non isomorphes faisables avec cinq allumettes, qui se regroupent en 10 classes d'homéomorphie.

Le petit tableau indique le nombre $a(n)$ de graphes non isomorphes faisables avec n allumettes sur un plan, et le nombre $b(n)$ de classes d'homéomorphie de ces graphes-allumettes.

2. Les graphes-allumettes k -réguliers et le graphe de Harborth



Les graphes-allumettes dont chaque sommet est le point de rencontre de k arêtes exactement – les graphes k -réguliers – sont faciles à trouver pour $k=1$ et $k=2$. Pour $k=2$, ce sont les

graphes en anneaux composés de n sommets et n arêtes. Le plus petit est un simple triangle équilatéral. Trouver ces graphes-allumettes k -réguliers pour $k=3$ est moins facile. La

solution minimale comporte huit sommets. Pour $k=4$, une solution est le graphe de Harborth, mais on n'est pas certain que ce soit la solution minimale. Pour $k>4$, il n'existe

aucune solution. Pour les graphes-allumettes sur la sphère, il existe une solution pour $k=5$ qui est la projection sur la sphère des arêtes d'un icosaèdre inscrit.

aux polyèdres réguliers ou semi-réguliers sont tous des graphes réguliers. En 1986, un très joli problème a été posé par Heiko Harborth, de l'Université de Braunschweig en Afrique du Sud. Il porte sur les graphes réguliers faisables sur un plan avec des allumettes. Ce problème, qui n'est que partiellement résolu aujourd'hui, comporte deux questions : 1) Pour quelles valeurs de l'entier k existe-t-il des graphes-allumettes k -réguliers ? 2) Pour chaque k pour lequel de tels graphes existent, quel est le nombre minimal de sommets d'un graphe solution ?

L'encadré 2 présente quatre dessins donnant des solutions pour $k=1, 2, 3$ et 4. Le graphe pour $k=3$ n'est pas tout à fait évident, cependant sa recherche constitue un petit casse-tête d'une difficulté raisonnable, qu'on proposera donc à ses amis en

prenant l'apéritif. L'énoncé du défi sera : « Trouver une disposition d'allumettes sur la table, sans croisement et telle que chaque extrémité d'allumette en rencontre deux autres exactement ».

Prévoir 12 allumettes au moins. Si un de vos amis trouve la solution, demandez-lui alors de traiter le problème avec $k=4$ (chaque extrémité d'allumette doit en rencontrer trois autres exactement). Cette fois, il faut prévoir 52 allumettes. La merveilleuse solution découverte en 1985 par H. Harborth porte aujourd'hui son nom. Ce graphe à 52 sommets est rigide : on ne peut pas le déformer en maintenant toutes les jonctions (la solution pour $k=3$, elle, n'est pas rigide). Connaître exactement les coordonnées des sommets du graphe de Harborth est assez délicat, mais indispensable pour être certain que le graphe

existe et démontrer sa rigidité. Ce travail n'a été fait qu'en 2006 par Eberhard Gerbracht, à l'aide d'un logiciel de calcul formel. Dans le cours de ses calculs, il a dû manipuler un polynôme de degré 22.

Le graphe de Harborth est-il minimal ?

Pour $k=1, 2, 3$, on est certain qu'il n'y a pas de solution plus petite que celles indiquées dans la figure. Pour $k=4$, on n'a pas encore réussi à démontrer que le graphe de Harborth est minimal. En 2011, Sascha Kurz, de l'Université de Bayreuth, et Rom Pinchasi, du Technion en Israël, ont établi à l'aide d'un programme qu'un graphe-allumettes 4-régulier a au moins 34 sommets. On est loin du nombre 52 de la solution de