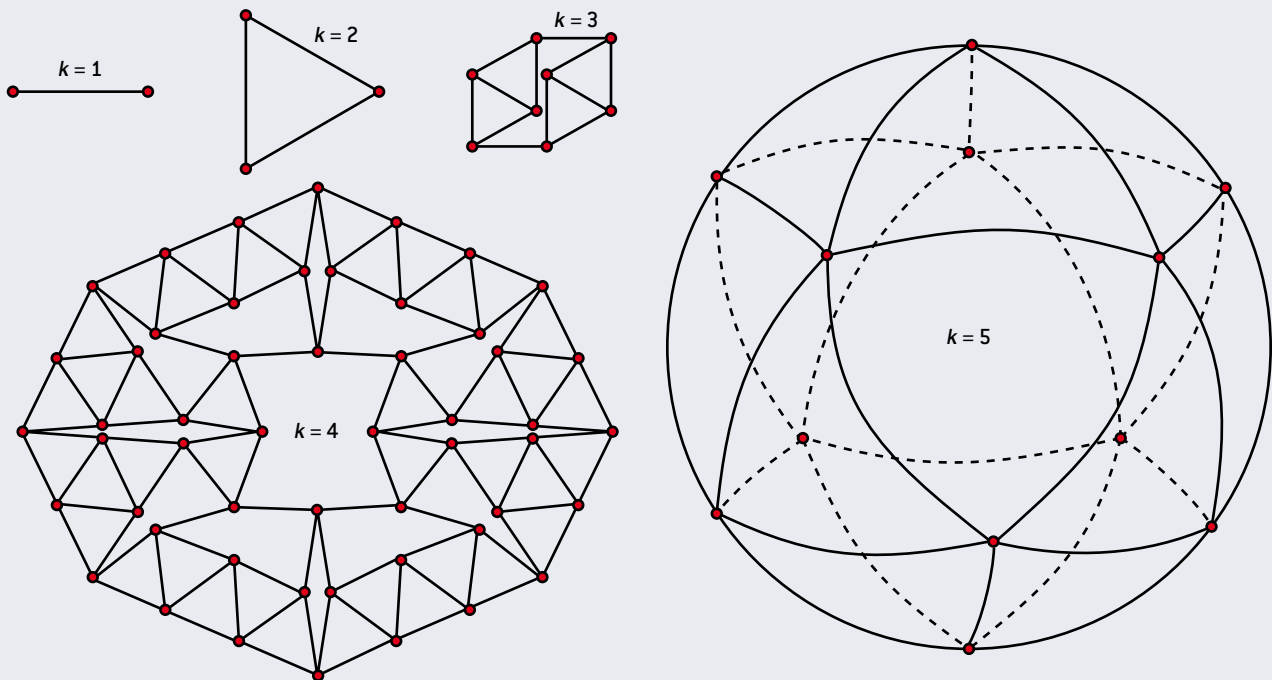


2. Les graphes-allumettes k -réguliers et le graphe de Harborth



Les graphes-allumettes dont chaque sommet est le point de rencontre de k arêtes exactement – les graphes k -réguliers – sont faciles à trouver pour $k = 1$ et $k = 2$. Pour $k = 2$, ce sont les

graphes en anneaux composés de n sommets et n arêtes. Le plus petit est un simple triangle équilatéral. Trouver ces graphes-allumettes k -réguliers pour $k = 3$ est moins facile. La

solution minimale comporte huit sommets. Pour $k = 4$, une solution est le graphe de Harborth, mais on n'est pas certain que ce soit la solution minimale. Pour $k > 4$, il n'existe

aucune solution. Pour les graphes-allumettes sur la sphère, il existe une solution pour $k = 5$ qui est la projection sur la sphère des arêtes d'un icosaèdre inscrit.

aux polyèdres réguliers ou semi-réguliers sont tous des graphes réguliers. En 1986, un très joli problème a été posé par Heiko Harborth, de l'Université de Braunschweig en Afrique du Sud. Il porte sur les graphes réguliers faisables sur un plan avec des allumettes. Ce problème, qui n'est que partiellement résolu aujourd'hui, comporte deux questions : 1) Pour quelles valeurs de l'entier k existe-t-il des graphes-allumettes k -réguliers ? 2) Pour chaque k pour lequel de tels graphes existent, quel est le nombre minimal de sommets d'un graphe solution ?

L'encadré 2 présente quatre dessins donnant des solutions pour $k = 1, 2, 3$ et 4. Le graphe pour $k = 3$ n'est pas tout à fait évident, cependant sa recherche constitue un petit casse-tête d'une difficulté raisonnable, qu'on proposera donc à ses amis en

prenant l'apéritif. L'énoncé du défi sera : « Trouver une disposition d'allumettes sur la table, sans croisement et telle que chaque extrémité d'allumette en rencontre deux autres exactement ».

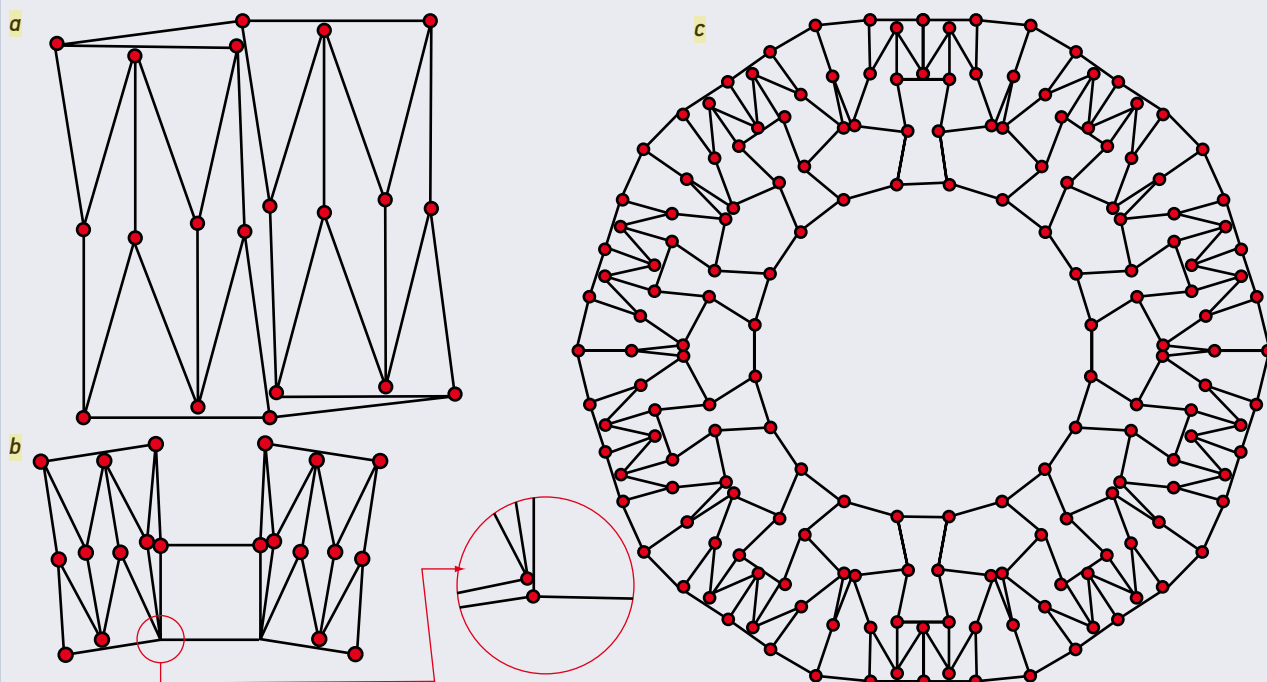
Prévoir 12 allumettes au moins. Si un de vos amis trouve la solution, demandez-lui alors de traiter le problème avec $k = 4$ (chaque extrémité d'allumette doit en rencontrer trois autres exactement). Cette fois, il faut prévoir 52 allumettes. La merveilleuse solution découverte en 1985 par H. Harborth porte aujourd'hui son nom. Ce graphe à 52 sommets est rigide : on ne peut pas le déformer en maintenant toutes les jonctions (la solution pour $k = 3$, elle, n'est pas rigide). Connaître exactement les coordonnées des sommets du graphe de Harborth est assez délicat, mais indispensable pour être certain que le graphe

existe et démontrer sa rigidité. Ce travail n'a été fait qu'en 2006 par Eberhard Gerbracht, à l'aide d'un logiciel de calcul formel. Dans le cours de ses calculs, il a dû manipuler un polynôme de degré 22.

Le graphe de Harborth est-il minimal ?

Pour $k = 1, 2, 3$, on est certain qu'il n'y a pas de solution plus petite que celles indiquées dans la figure. Pour $k = 4$, on n'a pas encore réussi à démontrer que le graphe de Harborth est minimal. En 2011, Sascha Kurz, de l'Université de Bayreuth, et Rom Pinchasi, du Technion en Israël, ont établi à l'aide d'un programme qu'un graphe-allumettes 4-régulier a au moins 34 sommets. On est loin du nombre 52 de la solution de

3. Graphes où les triangles sont interdits



On recherche des graphes-allumettes k -réguliers où la longueur T du plus petit circuit est différente de 3 : le graphe ne doit comporter aucun triangle. Pour $k = 3$ et $T = 4$, une

solution à 20 sommets (a) a été trouvée récemment par S. Kurz et G. Mazzuocollo qui proposent aussi une méthode donnant des graphes-allumettes 3-réguliers avec $T = 4$ et un

nombre pair ≥ 20 de sommets. L'idée (b) est de remplacer le quadrilatère de la partie centrale par une série de quadrilatères formant une chaîne (un quadrilatère supplémentaire

augmente le nombre de sommets de 2). Pour le cas difficile $k = 3$ et $T = 5$ (pas de triangle, pas de quadrilatère), la solution minimale à ce jour est ce graphe à 180 sommets (c).

H. Harborth, mais on ne sait pas faire mieux pour l'instant ; on recherche donc des graphes-allumettes 4-réguliers plus petits que le graphe de Harborth.

Pas de solution pour $k > 4$

Pour $k = 5$, on soupçonnait depuis longtemps qu'aucune solution n'est possible. Plusieurs preuves ont été proposées pour établir cette inexistence. Dans un premier temps, certaines comportaient des erreurs. Les preuves admises aujourd'hui sont dues à Aart Blokhuis, de l'Université d'Eindhoven, S. Kurz et R. Pinchasi. Aucune n'est assez simple pour être reproduite ici !

Remarquons que cette impossibilité ne concerne que le plan. Sur une sphère, en prenant les projections des arêtes d'un

icosaèdre [le polyèdre de Platon à 20 faces] sur la sphère dans lequel il s'inscrit, on dessine à la surface de la sphère un graphe-allumettes 5-régulier (voir l'encadré 2).

Pour $k = 6$, il n'y a pas de graphes-allumettes 6-réguliers au sens usuel, c'est-à-dire ayant un nombre fini de sommets, mais il est facile d'imaginer une solution infinie. Réfléchissez trois secondes (réponse : un pavage de triangles équilatéraux sur tout le plan).

Pour $k \geq 6$, on démontre, cette fois facilement, qu'il n'y a pas de solution. La démonstration utilise la formule d'Euler pour les graphes planaires. Celle-ci indique que pour un graphe planaire, on a toujours $S - A + F = 2$, où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes, et F le nombre de faces [c'est-à-dire de zones du plan créées par le

graphe, y compris la zone extérieure au dessin du graphe].

Voici cette démonstration. Si le graphe est k -régulier, à chaque sommet arrivent exactement k arêtes, donc $kS = 2A$. La formule d'Euler devient :

$2A/k - A + F = 2$, ou $F = 2 + (1 - 2/k)A$. Chaque zone du plan délimitée par le graphe comporte au moins trois arêtes sur son pourtour et chaque arête borde exactement deux zones. Cela signifie que $F \leq 2A/3$. On en tire $2A/3 \geq 2 + (1 - 2/k)A$ ou $0 \geq 2 + (1/3 - 2/k)A$. Or cela est impossible quand $k \geq 6$, car $(1/3 - 2/k)$ est alors positif ou nul. Cela achève notre démonstration.

Dans un graphe, la longueur de la plus courte liste d'arêtes qui se suivent et reviennent à leur point de départ se nomme taille du plus petit circuit. On note T ce